x

Al.24/1

N.° 7.

Prima Edizione di quest'opera molto stimata vedi Mondfeuier Dict.

QA
31
.F93
1574
v.1
Jesuitana

OCLC 53424796
9/29/2005



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonſtrationibus, accuratiſq; ſcholijs illuſtrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

SERENISSIMO

PRINCIPI,

AC D. D. EMANVELI PHILIBERTO

Sabaudiæ Duci.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS SOCIETATIS IESV S. P. D.

EST profecto (quod te non fugit) Princeps Sereniſs. præclara quædã res, ac plane diuina, rerum cognitio, quæ merito in optimo quoq; incredibile ſui deſideriũ excitat, quo facimus hæc hominũ breuis, & calamitoſa uita,

ignorantiæ quaſi tenebris diſiectis, & ad exi tum ipſa ſuum perueniat,& omnia quæ acci dere poſſunt,incommoda leuiora ducat. Ac ſi ea quæ ſunt a ſummis philoſophiæ principibus de liberalium artium dignitate vere ac ſapienter ſcripta, falſa eſſe non crẽdimus; nemini dubium eſſe poteſt, quin & rerum obſcuritate, & incerta cognitionẽ, mirum in modum minuatur illa ſiue uoluptas, ſiue animi iucunditas appellanda eſt, quæ ex ipſa alioqui rerum contemplatione percipi ſolet. Equidem fateor (quod ſummo uir ingenio dixit Ariſtoteles) eximiam quandam eſſe in naturæ perueſtigatione poſitam delectationem, rerumque naturalium ſcientiam, multis philoſophiæ partibus nobilitate præcellere: Sed quis non uideat in tanta opinionum uarietate, quarum (cum ſit unica veritas) aut non plus una ueram, aut omnes falſas eſſe neceſſe eſt, multum uel inconſtantiæ, uel errori relictum eſſe loci, quo quidem nihil eſſe poteſt a ſcientia magis alienum? Quod ſi (ut eſt apud eundem peripateticæ diſciplinæ principem) doctrinarum nobilitas tum ex rerum dignitate, tum ex elaborata probandi ratione pendet; quid de mathematicis diſciplinis exiſtiman-

ſtimandũ eſt, quæ ut de rerũ præſtantia nihil dicam, tantam habent ſuis in rationibus firmitatem, ut non tam perſuadere, quam uim quodammodo afferre uideantur. Quotus enim quiſque eſt, qui Archimedis, & Apollonij, cæterorumque Mathematicorum libros legens acutiſſimorum hominum non admiretur ingenia, & menti ſuæ firmiſſimas quaſdam quaſi machinas admoueri non ſentiat, ut ijs quæ illi tradunt, uel inuitus aſſentiri cogatur? Qua quidem ex re dici uix poteſt, quantam animus noſter capiat uoluptatem, dum ita in ſententia perſtat, remque omnem plane percipit, ac tenet, ut neutram in partem dubius inclinet, nuſquam fluctuet, nedum falſis opinionibus imbuatur. Cuius ſane tam certæ tamque accuratæ ſcientiæ, cum ſolum ac fundamentum Euclidis, quæ dicuntur, elementa communi omnium Mathematicorum conſenſu exiſtimentur; Tantam profecto ſummus ille vir apud poſteros laudem meretur, quanta optimo in primis diligentiſſimoque magiſtro, atque ipſi etiam primo artis inuentori iure debetur. Quo magis eorum probanda uidetur induſtria, qui in his ipſis elementis aut explicandis, aut illu-

 ſtrandis

ſtrandis ſtudium, atque operam collocant, ut quanto hæc mathematicarum diſciplinarum initia aut faciliora, aut firmiora fuerint, tanto quæ conſequuntur omnia planius cognoſcantur. Quæ cum ego multos annos partim publice docendo, partim priuatim commentando, & cum alijs viris doctis communicando diligentius pertractaſſem, collegiſſemque (ut fere fit) in meum priuatum uſum nonnulla, quæ ad eorum cognitionem facere uiderentur; faciendum mihi neceſſario exiſtimaui, præſertim auditorum, amicorumque meorum precibus fatigatus, præterea Laurentij Caſtellani ciuis Romani liberalitate inuitatus, qui oẽs ad id neceſſarios ſumpt⁹ benigne admodũ ſuppeditauit, ad publicã ſtudioſorum utilitatẽ, in lucem manusque hominum exire permitterem. Tibi uero potiſſimũ Princeps Sereniſſ. has meas lucubrationes dicaui, primum quod tibi Mathematicorum omnium eximio patrono hæc noſtra maxime ſtudia cordi eſſe intelligebam; deinde quod pro tua in noſtrũ ordinem uniuerſum ſingulari beneuolentia, atque promeritis aliquod tibi grati animi indicium extare ſocietas noſtra uehementer optabat. Huc accedebat priuatum etiam

ſtudium

ſtudium in te meum, quod ab humanitate tua ſingulari, oratoriſque tui Vincentij Parpaleæ viri ampliſſimi beneuolentia prouocatus, nihilo tibi minus ego ſum priuatim obſtrictus, quam publice Societas noſtra vniuerſa. Accipe igitur hoc tenuitatis noſtræ munuſculũ, ſi rem ſpectes, exiguum illud quidem, & meritis tuis longe impar; ſin animum intuearis, amoris & obſeruantiæ pleniſſimum. Quod ſi tibi gratum iucundumq; accidiſſe cognouero, cum ſatis amplam laboris mei mercedem ac præmium me tuliſſe exiſtimabo, tum vero ad alia eiuſdem generis commentanda, & elucubranda, ſi otium & occaſio ſe offeret, efficiar alacrior. Vale.

ROMAE, KALENDIS FEBR.

M. D. LXXIIII.

LECTORI. S.

SI QVIS *forte miratur, cur poſt tot præclariſſimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis ſcriptoribus editos, nouas adhuc ipſi cõmentationes conſcripſerimus, is facile ſibi perſuadebit, non temere id a nobis eſſe factum, ſi conſilij noſtri rationem cognouerit. Cum enim longa, diuturnaque experientia nobis eſſet perſpectum, atque exploratum, eam eſſe utilitatem, atque adeo neceſſitatẽ horum elementorum, ut fruſtra quiſquam ſe ſperet ipſorum præſidio, acutiſſimas, ſubtiliſſimaſque Archimedis, Apollonij, Theodoſii, Menelai, Ptolomæi, cæterorumque illuſtrium Mathematicorum demonſtrationes poſſe percipere; uehementer dolebamus, tam inſignem, & illuſtrem auctorem a pleriſque omnino negligi, a perpaucis uero pro dignitate tractari, ita ut uix hoc noſtro ſeculo reperiantur, qui ſedulá operá, ac ſtudiũ in perdiſcendis his elementis ponant, ob eam potiſſimum, ut arbitror, cauſam, quód difficultate rerum, quas tractant, atq; obſcuritate deterreantur, nullũq; habeant hac in re ducẽ, quem ſibi citra erroris periculum ſequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in ſingulos Euclidis libros ſane eruditi, qui ſatis eſſe poſſint cuiuis ad facile con-*

ſequen-

ſequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, uerbaque propoſitionum eiuſdem locis non paucis immutarunt, ut uerus, germanuſque auctoris ſenſus perdifficile poſſit intelligi; id quod maxime in decimo libro perſpicitur: Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, uitijſque incuria librariorum ita eſt depravatus, & propter notas græcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas, ac male expreſſas adeo impeditus, ut magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, ut Euclidem ſine maximo labore, ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram uſque memoriam maius aliquod ſtudium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi uel ſex priores tantum libros expoſuerunt, uel ſi qui in uniuerſum Euclidem commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demonſtrationibus certiſſimis, (Federicum tamen Commandinum Vrbinatem Geometram peritiſſimum excipio, cuius opera, atque diligentia Euclides latine redditus, & in priſtinum nitorem, iuxta ueterum interpretum ſenſum, ac traditionem, reſtitutus, nunc denuo prodijt in lucem,) proprias alias, ac nouas confixerunt, quæ plerunque non tam firmæ ſunt, neque rem ipſam ſimpliciter, & abſolute conficiunt; præſertim quod modo e propoſitionibus uoces quaſdam perperam detrahũt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, ut merito de uero, proprioque Euclidis ſenſu dubitare quis poſſit. Quæ cum ita ſint,

reſque

reſque ac ſcientia tam præclara digna ſit, quæ ope, ſtudio, induſtria ab iis adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre poſſunt poſt diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, ut lucubrationes noſtras, ac uigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur,) ſubſidij allaturas, in publicum ederemus. Acceſſit editionis cauſa altera: Nam cum Euclides, propter ſingularem utilitatem, inſtar enchiridij, manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuaui Matheſeos ſtudio capere uolunt, in eoque progredi; id uero in hunc diē, exemplaribus omnibus maiore forma impreſſis, necdum factum uideamus; hoc noſtra editio certe, ſi nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sūt enim hi noſtri commentarij in uniuerſum Euclidē conſcripti commodiore nunc forma, quam uulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) uolumineq; editi, ut facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, uia, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maxime Theonis; quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti quidam aſſeuerant, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatam licuit, uel certe planiores, quando illud non potuimus, delucidioreſque reddere conati ſumus. Non enim illas nude, ac totidem uerbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, ut illud accidat, quod ab elegan-

elegantiſſimo poeta dictum eſt. Breuis eſſe laboro, obſcurus fio: Interdum etiam, cum breuius, atq; ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quam ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare utrunque uitantes, eas, uelut παραφραστικῶς, atq; ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem *interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & uoluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia,* Euclides *facilius a ſtudioſis, ijs præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia nunc primum auſpicantur, ac maiore uoluptate, utilitateque cognoſcetur. Præter hæc adiunximus multis in locis uaria problemata, ac theoremata, ſcitu non iniucunda, neque a ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo,* Campano, *alijſque auctoribus decerpſimus, partim proprio (ut aiunt) Marte, aſſiduiſque meditationibus ipſi confecimus.* D*ata inſuper in hoc diligẽs opera, ut definitiones* Euclidis, *præſertim obſcuriores, & quæ aliquid uiſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in ſcopulos quoſdam, incidentes, a recto curſu deflexerunt, & in errores uarios, atque abſurdos, prorſumque ab inſtituto diſciplinæ abhorrentes, dilapſi ſunt.) dilucide, atque perſpicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facile iudicabunt. Quæ res cum in ampliorẽ magnitudinẽ excreſcerent, quam ut unius libri ſpatijs, hac præſertim forma, commode includi poſſent, in duas partes totam tractationem diuiſimus.* Altera *nouem prioribus libris continetur: altera ſex reliquos, una cum decimoſexto ad comparationes*

quinque

quinq; corporũ regulariũ pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla adijcere uoluimus, cõplectitur. Nunc, quia hæc Euclidis elementa oſtium, atque aditum ad omnes alias ſcientias Mathematicas reſerant ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipſa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, unde nam Mathematicæ diſciplinæ hoc nomen acceperint; quæ ſit earum diuiſio; a quibus primum ortæ, & per quos deinde ſingulæ fuerint excultæ; quanta ſit illarum præſtantia, atque utilitas, & ſi qua ſunt alia rei noſtræ opportuna.

MATHE-

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE *Mathematicæ, quæ quidē*
circa quantitatem uerſantur omnes, nomen ac-
ceperunt a dictione græca μάθημα, *ſiue* μά-
θησις, *quæ ſignificat diſciplinam, ſeu doctri-*
nam. Cur autem hæ artes de quantitate agen-
tes nomen diſciplinæ, uel doctrinæ inter reli-
quas omnes ſolæ ſint adeptæ, duas potiſſimum cauſas apud pro-
batos ſcriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici exi
ſtimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato nu
mero contineri, eaſque de corpore in corpus migrare, (quod
tamen chriſtiana fides falſum eſſe perſpicue docet) teſtantur,
eas nomen doctrinæ, ſiue diſciplinæ obtinere, quod maxime ex
ipſis nanciſcamur recordationem, reminiſcentiamque illius
ſcientiæ, qua anima noſtra (ut eorum eſt error) antequam cor
pus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac fami-
liari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui
Menon inſcribitur, ubi Socratem introducit puſionem quen-
dam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimenſio-
ne, ad quæ licet in principio reſponderit, ut puer, gradatim ta-
men aſcendens eo deductus eſt, ut reſponderit id, quod tandem
dicturus fuiſſet, ſi diutiſſime perdidiciſſet Geometriam. Alijs
autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen ſcientiæ, & do-
ctrinæ ſibi uendicare, quod ſolæ modum, rationemque ſcientiæ
retineant. Procedunt enim ſemper ex præcognitis quibuſdam
principijs ad concluſiones demonſtrandas, quod propriū eſt mu-
nus, atque officium doctrinæ, ſiue diſciplinæ, ut & Ariſtoteles 1. poſter.
teſtatur; neque unquam aliquid non probatum aſſumunt Ma-
thematici, ſed quandocunque aliquid docere uolunt, ſi quid ad
eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id ſumunt pro
conceſſo, & probato: illud uero modo explicant, de quo ante ni-
hil ſcriptum eſt. Quod quidem alias artes, diſciplinaſue nō ſem
per obſeruare uidemus, cum plerunq; in confirma-
tionem eorum, quæ oſtendere uolunt, ea, quæ
nondum ſunt explicata, demonſtra-
taue, adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARUM diuiſio.

PYTHAGOREI, quos deinde ſecuti ſunt omnes propemodum Mathematici, atq; Philoſophi non pauci, Mathematicas diſciplinas uniuerſas in quatuor partes diſtribuerunt, Aritmethicam, Muſicam, Geometriam, ac Aſtronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam uerſantur, ſit uel diſcreta, ſub qua omnes numeri, uel cōtinua, ſub qua omnes magnitudines comprehenduntur; & utraque tam ſecundum ſe, quam comparatione alterius poſſit conſiderari; Viſum fuit illis conſentaneum, quatuor prædictas facultates inſtituere, quæ utranque quantitatem, pro duplici conſideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate diſcreta ſecundum ſe, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac paſſiones: Muſica tractat eādem quantitatem diſcretam, ſiue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum ſonorum concentus reſpicit, atque harmoniā. Geometria de magnitudine ſiue quātitate cōtinua, ſecundū ſe quoq;, ut immobilis exiſtit, diſputat. Aſtronomia deniq; eandē magnitudinē, ut eſt mobilis, conſiderat; qualia ſunt cæleſtia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor ſcientias Mathematicas, quarū Arithmetica, & Geometria puræ, Muſica uero, atq; Aſtronomia mixtæ dicunt, oēs aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis eſt perſpectiua, Geographia, & cæteræ huiuſmodi, uel facile, ut ad capita, a quibus dependent, reduci poſſunt.

ALIA rōne a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, ut auctor eſt Proclus in cōmētarijs, quos in primū Euclidis librū edidit, Mathematicæ diſciplinæ diuidunt. Quā quidē diuiſionē, quoniā elegāter, copioſeq; docet, ad quanā ſeſe extēdāt Mathematicæ diſciplinæ, ferme ad uerbū ex Proclo iuxta interpretationē Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptā hic ſubijcere ſtatui. Volūt itaq; prædicti auctores, ſciētiarū Mathematicarū quaſdā in intellectilibus duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam uero in ſenſi libus, ita ut attingant materiam ſenſibus obnoxiam, uerſari. Prioris generis ſtatuunt duas longe primas, præcipuaſq; ſcientias, Arithmeticam, & Geometriam: In poſteriori uero genere conſtituunt ſex, Aſtrologiam, Perſpectiuam, Geodæſiam, Canonicā ſiue Muſicam, Supputatricē, atq; Mecha-

Mechanicam. Aſtrologiam dicunt eſſe eam facultatem, quæ de mundanis diſſerit motibus; de corporum cæleſtium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque diſtantijs, ac de alijs huiuſmodi rebus. Huius rurſum tres conſtituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimenſione, poſitu gnomonũ, exercetur: Metheoroſcopica, quæ eleuationum differentias, ſyderumq reperit diſtantias, nec non multa alia, & varia Aſtrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque ſtellarum diſtantias huiuſcemodi dioptricis dignoſcit inſtrumentis. Perſpectiuam aiunt a Geometria gigni, atque uti radijs viſorijs, tanquam lineis, et angulis, qui ex hiſce conſtituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perſpectiua, quæ quidem reddit cauſam earum apparentiarum, quæ aliter, quam ſint, ſeſe nobis offerre ſolent, ob eorum, quæ ſub uiſum cadunt, alios ſitus, & diſtantias, vt parallelarum coincidentiæ, uel quadratorum, tanquam circulorum, aſpectionit: Et in vniuerſam ſpeculariam, quæ circa uarias, multiplicesque verſatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc eſt, vmbrarum deſignatrix appellatur, quæ oſtendit, qua ratione fieri poſſit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudinesque videantur. Geodæſiam appellant eam ſcientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tanquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non aſſequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, ſed ſenſilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero craſſioribus, vt ſpartis, & perpendiculo. Diuiditur hæc, ut Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ ſolida dimetitur. Canonicam, ſiue Muſicam, vocant eam ſcientiam, quæ apparentes concentuum conſiderat rationes, ſenſusque ubique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis exiſtit, ut menti aures ipſas præpoſuiſſe videatur. Supputatrix eadem apud ipſos eſt, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros conſiderat, non vt in intellectilibus, ſed vt ſunt in ſenſilibus ipſis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum ſenſilium, materiæque coniunctarum conſiſtit, apud ipſos multiplex eſt: Quædam enim eſt inſtrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ *vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis ſunt bellis idonea,*

nea, qualia ſane Archimedes etiam fertur conſtruxiſſe, Syracuſas terra, marique obſidentibus reſiſtentia; Quædam mirabilium prorſus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe quæ alia quidem ſpiritibus maximo cum artificio conſtruit, quemadmodum etiam Cteſibius, atque Heron operantur; alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, ſtatus vero æquilibrium eſſe cauſam cenſendum eſt, ut Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, ſpartisque animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam eſt æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia uocantur, cognitio: Quædam denique ſphærarum effectrix, quæ σφαιροποιΐα appellatur, ad cæleſtium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus eſt: Atque ut vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur ſunt diſciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad inſtruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam eſſe non cenſent, vt quidã alij voluère, ſed vti eam volunt modo quidem arte ſupputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæſia, ut in diuidendis, dimetiendisque caſtrametationi ſpatijs in campo. Quemadmodum neque Hiſtoricam, neque medendi artem Mathematices partem ullam eſſe dicunt, licet ſæpenumero tum Hiſtorici, tum etiam Medici Mathematicis utantur theorematibus; Rerum quidem geſtarum ſcriptores, vel climatum ſitus referendo, uel urbium magnitudines, & diametros, uel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero, quamplurimas res in arte ſua huiuſcemodi uijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Aſtrologia peruenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis tẽporibus, locisque dixere. Eadem ſane ratione ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam acccommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra, ſuosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum uero ad figuram quadranguli, uel quinquanguli, vel alterius cuiuſdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarũ partitione reliquerunt.

INVEN-

INVENTORES MATHEMATICARUM diſciplinarum.

OMNES diſciplinas Mathematicas a uarijs, & diuerſis auctoribus ortum, originemque duxiſſe, perſpicue hiſtoriæ teſtantur: Immo uero ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio, ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſſiſſe, memoriæ quoque proditum eſt. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, ut auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pythagoras, eiuſq; ſucceſſores, nec non Aegyptij, Græci denique ac Arabes amplificarunt, uarijsque problematis, atque theorematis illuſtrarunt. Muſicam deinde a Mercurio primum eſſe inuentam, multi ſcriptores tradunt; quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus uero Herculi, & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra uſque tempora manauit. Geometria uero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta eſt, ortumque habuit ab agrorum emenſione. Cum enim anniuerſaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, uaſtaretque, ut nemo agrum dignoſcere poſſet ſuum, cæperunt Aegyptij animos ad rationem menſurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod ſuum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipſo tamen officio Geometria eſt appellata. γεωμετρέομαι enim, ſiue γεωμετρέω idem ſignificat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cæpta eſt expoliri, & non contenta ſuis finibus, ſe ſe ad corpora etiam cæleſtia dimetienda conuertit, tradiditq; principia uniuerſæ Aſtronomiæ, Perſpectiuæ, Coſmographiæ, & alijs diſciplinis quam plurimis, quæ ex ipſa, veluti radices dependent. Hanc Thales Mileſius ex Aegypto in Græciam primus tranſtuliſſe fertur: Deinde eam inſignes Philoſophi, ac Mathematici plurimi, acutiſſimisque demonſtrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi ſunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theo

b dorus,

dorus, Theætetus, Ariſtarchus, Eratoſthenes, Archytas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypſicles Alexandrinus, Archimedes Syracuſius, Apollonius Pergæus, Theodoſius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Aſcalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum eſſet recenſere. Aſtronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam eſſe autumãt: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Aſtronomiæ cognitionem, exortam eſſe uolunt fabulam, illum ſuis humeris cælum ſuſtinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obſeruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) ſyderum ſcientiam adinueniſſe. Alij Aegyptios primos huius ſcientiæ faciunt inuentores: Alij Aſſyrios: Alij deniq; gloriam hanc, & laudem Babylonijs eſſe deferendam, cenſent. Hac autem in ſcientia, ut eſt præſtantiſſima, ita quoque maxime illuſtres auctores claruerunt, quod non eſt huius loci declarare. Cæterum, præcipuis hiſce quatuor diſciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipſis, tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ ſunt, atque deductæ.

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANtia Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM *diſciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ abſque ulla materia ſenſibili conſiderantur, quamuis re ipſa materiæ ſint immerſæ; perſpicuum eſt, eas medium inter Metaphyſicam, & naturalem ſcientiam obtinere locum, ſi ſubiectum earum conſideremus, ut recte a Proclo probatur. Metaphyſices etenim ſubiectum ab omni eſt materia ſeiunctum & re, & ratione: Phyſices vero ſubiectum & re, & ratione materiæ ſenſibili eſt coniunctum: Vnde cum ſubiectum Mathematicarum diſciplinarum extra omnem materiam conſideretur, quamuis re ipſa in ea reperiatur, liquido conſtat, hoc medium eſſe inter alia duo. Si uero nobilitas, atque præſtantia ſcientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus vtitur, ſit iudicanda, haud dubie Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque*

firmantque, ita vt vere ſcientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorſus dubitationem tollant; Id quod aliys ſcientiys vix tribuere poſſumus, cum in eis ſæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac ſententiarum varietate in veritate concluſionum iudicanda ſuſpenſus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorũ ſectæ, (ut alios interim philoſophos ſilentio inuoluam) quæ ab Ariſtotele, veluti rami e trunco aliquo, exortæ, adeo & inter ſe, & nonnunquam a fonte ipſo Ariſtotele diſſident, ut prorſus ignores, quid nam ſibi uelit Ariſtoteles, num de nominibus, an de rebus potius diſputationem inſtituat. Hinc fit, ut pars interpretes Græcos, pars Latinos, aliy Arabes, aliy Nominales, aliy denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos ſe eſſe glorientur) tanquam ductores ſequantur. Quod quam longe a Mathematicis demonſtrationibus abſit, neminem latere exiſtimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in ſcholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonſtrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, ſeu dialogo, qui de ſummo bono inſcribitur; Eam ſcientiã eſſe digniorem, præſtantiuremque, quæ magis ſynceritatis, ueritatisque eſt amans. Cum igitur diſciplinæ Mathematicæ ueritatem adeo expetant, adament, excolantque, ut non ſolum nihil, quod ſit falſum, uerum etiam nihil, quod tantum probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentque, dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias ſcientias omnes ſit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMATICARUM diſciplinarum.

NON ſolum vtiles, verumetiam neceſſariæ admodum cenſeri debent diſciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiſcendas, tum ad rem etiam publicam recte inſtituendam, & adminiſtrandam. Neque enim ad Metaphyſicã, vt eleganter oſtendit Proclus, vlli patet aditus, niſi per Mathematicas diſciplinas. Nam ſi a rebus ſenſibilibus, quas Phyſicus conſiderat, ad res ab omni materia ſenſibili ſecretas, ſeiunctasque, quas contemplatur Metaphyſicus, vires, aciemq;

noſtri intellectus attollere abſque ullo medio tentemus, noſmetipſos excæcabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus phyſicis, quæ materiæ ſenſibus obnoxiæ ſunt coniunctæ, ad res metaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maxime auulſæ, intellectus aſcendat, neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſuefieri rebus minus abſtractis, quales a Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationẽ exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ diſciplinæ ad ſacras literas recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis uerbis pulcherrime nobis exponit B. Auguſt. lib. 2. de Doctrina Chriſt. demonſtrans, numerorum inſcitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac myſtice poſita ſunt in ſcripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit; eandemque ſententiam longe poſt pluribus uerbis repetit eodem lib. Hoc idem docet D. Hieron. tomo 1. Epiſt. 1. aſſerens, magnam ineſſe numeris uim ad multa myſteria in ſcripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem, perhibet. Rurſum B. Auguſt. loco, quem paulo ante retuli, teſtatur, Muſicam perneceſſariam eſſe doctori Chriſtiano, ſubiungens paulo poſt, Theologos debere etiam Geographia diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, ſummis laudibus D. Baſilium præceptorem ſuum extollit, quod in Aſtrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque ſcientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, arteſque perfecte acquirendas, ut perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philoſophorum, maxime Ariſtotelis, & Platonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene recteque philoſophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, ut ea, quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus uidebantur eſſe, per exempla huiuſmodi clariora, magisque perſpicua fierent; quæ proculdubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematica-

Cap. 16. · Cap. 37. · Cap. 16. · Cap. 19.

maticarum omnino eſt expers. Quid? quod olim nemo auſus eſſet celeberrimum Diuini Platonis gymnaſium frequentare, qui prius optime Mathematicis diſciplinis non fuiſſet exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc ſymbolum dicitur pinxiſſe, ἀγεωμέτρητος ὀυδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles eſſe non dubitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas diſciplinas primo omnium eſſe addiſcendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (ut copioſe ſcribit (non ſolum ad reliquas artes rectius percipiendas, uerum etiam ad remp. bene adminiſtrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum noſtræ ætatis, ſi id neceſſe foret, in medium poſſem adducere. Ibidem clariſſimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos eſſe, idoneosque, adeo, ut etiam ſi nullam aliam nobis hæ ſcientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipſis percipiamus) perdiſcendas tamen omni ſtudio eas eſſe ſtatuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capeſſendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidẽ experientia ipſa magiſtra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hiſce diſciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs ſcientijs percipere: Contra uero, eos qui ad haſce facultates idonei minime reperiũtur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in ſuis operibus iterum atque iterum harum diſciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſopho, in Tymæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & pleriſque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de induſtria ſuperſedeo. Ad has omnes utilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiuſq; animus his artibus colendis, exercendiſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex ſeptem artibus liberalibus, in quibus non ſolum ingenui adoleſcentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honeſtiſſimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque verſari ſolebant: Quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate imitari conſpicimus. Teſtatur, magnam animi voluptatem ex his artibus per-

 cipi,

cipi, Diuinus Plato in.7.de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs ſtudijs excæcatur, defoditurque, a Mathematicis tantum diſciplinis recreari, excitarique rurſus ad eius, quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia Platonis, aliorumque grauiſſimorum philoſophorum, quibus harum diſciplinarum utilitas cum neceſſitate, & delectatione coniuncta, atque præſtantia abunde poteſt comprobari.

EVCLIDIS, ATQVE GEOMETRIÆ COMMENDATIO.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum inſtitutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum propoſuimus, deq; Geometria uniuerſa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim, ut teſtatur uulgata elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe philoſophum illum Megaris natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratiſque auditorem, qui ſectam inſtituit a ſe dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod ſectatores illius interrogando, reſpondendoq; (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de uitis philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Queſt. Acad. lib. 2. ubi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megareus, a quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet unum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. ſcribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiam diſcipulus fuit, conductores aræ ſacræ de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verum ſi Proclo nobili ſcriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum eſt, Euclides hic noſter iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, poſt Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Chriſtum natum anno 319. cœpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem uerius eſſe crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius

Megarici

Megarici diligentiſſime enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi uoluminis de Geometricis elemẽtis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monimentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus uel ſcientem uoluiſſe præterire, uel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum, ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo philoſopho longe alius eſt, qui, cum in doctrina Academicorum eſſet ſumma cũ laude uerſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo uendicarit. Scripſit autem uolumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phænomena, atq; Datorum liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de ſuperficierum diuiſionibus, Machometo Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id geuus opuſcula. Maxime uero hoc uolumen elementorum Geometricorum nunquam omnium conſenſione ſatis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, ut nullus unquam eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa (conſcripſerunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In quo quidem, ut ſummum ingenij acumen demonſtrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in uulgus edenda, ſed ea duntaxat, quæ uiſa ſunt eſſe neceſſaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis, & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Cæterum, quanta ſit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde uniuerſæ Geometriæ, præſtantia, ac utilitas, partim ex ijs, quæ ante ſcripſimus, partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obſcure perſpici poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob cauſam, quod ſine ipſis nullum opus Mathematicum poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes ſiquidem Mathematicarum re-

 rum

rum ſcriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodoſius, &c. in ſuis demonſtrationibus uſurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perſpecta, atque demonſtrata. Quamobrem ſicut is, qui legere uul:, elementa literarum diſcit prius, & illis aſſidue repetitis utitur in uocibus omnibus exprimendis; ſic qui alias diſciplinas Mathematicas deſiderat ſibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, neceſſe eſt. Ex his etenim elementis, ueluti fonte uberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diuiſio, omnis in cælo per inſtrumenta ſyderum obſeruatio, omnis horologiorum ſciotericorum compoſitio, omnis machinarum uis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum uariarum, qualis cernitur in ſpeculis, in picturis, in aquis, & in aere uarie illuminato, diuerſitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ eſt inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Oſtenditur, atque demonſtratur unius huius ſcientiæ ui cæli uniuerſi, ſyderumque perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, uarietas. Coniunctiones item planetarum, oppoſitiones, aſpectuſque uarij tam expedite cognoſcuntur, ut & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis, ac Lunæ defectiones certiſſime, ante quem fiant, in omne poſterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis noſtræ oculis munere, ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe uident, omniumq; fidē ſuperant, perſpicua facere, credibiliaq; eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtantur hiſtorie. Cum enim Hieron Syracuſarum rex nauem, quam Ptolemæo AEgyptiorum regi mittere ſtatuerat, tantæ eſſet molis fabricatus, ut eam omnes una Syracuſii a loco dimouere minime ualerent, Archimedes Geometra peritiſſimus unius Geometriæ uiribus fretus regi promiſit, ſe effecturum, ut ipſam ſolus rex abſque ullo labore ſubduceret: Quod cum præſtitiſſet, in conſpectu omnium rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur;

hibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi credendum eſt. Non diſſimile huic uidetur mihi eſſe pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, non diſſoluta, ſingula auri, & argenti pondera, quæ inter ſe aurificis fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſime oſtendit. Neque ſilentio præteriri debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonſtrationum Geometricarum innixum ſæpenumero, iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtram, quam incolimus, e loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis uiribus quibuſcunque, pondus quodcunque ſe poſſe mouere: Et alia id genus non ſolum ab Archimede, uerum etiam ab alijs præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe memoriæ proditũ eſt. Tantum denique nomen una hæc Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracuſanam urbem defenderat Archimedes machinis quibuſdam per Geometricas demonſtrationes adinuentis, & conſtructis, in expugnatæ urbis direptione, ac cæde ciuium unius Archimedis ſaluti publico edicto cauerit: quem ubi contra imperium ſuum, & uoluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, uehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem uiuo habere non potuit. Cuius ſepulchrũ Cicero a ſe, cum in Sicilia Quæſtoris officio fungeretur, repertum eſſe, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in ſummo ſemper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præſtantiam, utilitatemq; Geometriæ, quod cum demonſtrationes Geometricæ ſint maxime illuſtres, nemo ſine ipſis ſatis perſpiciet, quæ ſit uis demonſtrationum, nemoque eiſdem deſtitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus inſignis philoſophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inſcripſit. Is enim inſtructiſſimus rebus Dialecticis, cum ſcholas Peripateticorum, ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta miro cum animi ardore, ſtudioque arripuiſſet, nihil fere ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad demonſtrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiã naturali rationi pugnantia reperiſſe: Ita ut ad Pyrrhoniorum

fere (erant Pyrrhonij philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) hæſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæq; (quibus artibus ab auis, & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione, ſcientiaque reuocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe characteres illos Arithmeticos, & lineares demonſtrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime ſit utilis, ut aliæ artes facilius, & rectius percipiantur. Poſtremo eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibuſque modis prædicanda, quod non hæſit in exiguis, & inferioribus hiſce machinis, a quibus originem traxit, ſed euolauit in cælum uſque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurſus cæleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiuſque adminiſtrationem, & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA *diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali uocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprie, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria uniuerſe ſibi hunc ſcopum proponit, ut plana, aut ſolida uel conſtituat, uel conſtituta inter ſe comparet, aut diuidat. Neque uero mirum alicui uideri debet, quod cum tria ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolum de duobus poſterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autẽ de lineis, uel etiam punctis: Non, inquam, debet uideri mirũ, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potiſſimum circa figuras uerſatur, quæ in planis duntaxat, uel etiam ſolidis conſiſtunt omnes Non enim puncta, uel lineæ figuram ullam conſtituũt ſine planis, aut ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis, & lineis ſcientiam inſtituere; Superficiebus uero, ſiue planis, & corporibus, ſolidiſue maximę conueniebat, ut proprias nanciſcerentur tractationes. Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce elementis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis; in poſterioribus*

ribus uero quinque de ſolidis acutiſſime diſputat, eorumque pro prietates maxime illuſtres perueſtigat. Quoniam uero cum res omnes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfecte tractari non poterant; abſque linearum commenſurabilium; atque incommenſurabilium notitia; Immo uero quam plurimæ magnitudines ſub menſuram cadere nulla ratione abſque earundē linearum cognitione poſſunt, cum earum latera ſæpe numero ſint talia, ut ea communis, & nota menſura data metiri nequeat, ut liquido conſtat ijs, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atque uſum; idcirco ut hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimenſionemque requiſita, Stereometriæ ſuæ præpoſuit decimum librum, in quo ſubtiliter & copioſe de huiuſmodi lineis differit. Intelligens rurſum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium ſine numerorum cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, eaſque copioſe, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, eſt perſecutus. Quamobrem totum hoc uolumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehenſum, (quorum quidē priores tredecim ſine ulla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus, poſteriores uero duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari recte poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis cōmenſurabilibus, incommenſurabilibuſque diſputet; Quarta denique reliquis quinque libris abſoluta ſcientiam ſolidorum, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolute, inueſtigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto uero libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur: In ſexto denique proportiones figurarum planarū diſcutiuntur. Quid uero Euclides in ſingulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propoſitio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorũ diuiditur ab antiquis ſcriptoribus in Problema, & Theorema. Problema uocant eam demonſtrationem, quæ iubet, ac docet aliquid conſtituere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe triangulum æquilaterum conſtitui, appellabitur huiuſcemodi demonſtratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Dictum eſt autem hoc genus demonſtrationum Problema ad ſimilitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæſtio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipſi loquuntur,) eſt probabilis, qualis hæc eſt quæſtio; An totum diſtinguatur realiter a ſuis partibus ſimul acceptis: Sic etiam quæſitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent conſtruere, & cuius contrarium effici etiam poteſt, problema appellatur. Vt ſi quis proponat, ſe demonſtraturum, ſupra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum poſſe conſtitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Iſoſceles, uel ſcalenum, ſupra eandem lineam conſtitui poteſt. Pari ratione, qui inſtituit angulum rectilineum ſecare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi poteſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiuſque ambigat, utranam illius pars uera ſit: In Mathematico uero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita ut nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineã perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipſum ratione cõſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto uelit educere lineam non perpendicularem. Theorema autẽ appellãt eã demonſtrationẽ, quæ ſolũ paſſionẽ aliquã, proprietatẽue unius, uel pluriũ ſimul quantitatũ perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æ-

quales

quales duobus rectis, uocabunt talẽ demõſtrationẽ Theorema, quia nõ iubet, aut docet triangulũ, aut quippiã aliud conſtruere, ſed contemplatur tantũmodo triãguli cuius libet conſtituti paſſionẽ hanc, quod anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, contradictionis utraque pars uera ut ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, ut inæquales quoq; ſint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus eſt intelligenda. Itaque ut uno uerbo dicã, quæſitũ illud Mathematicum cõſtruere aliquid docẽs, cuius etiã oppoſitũ poteſt effici, Problema: Illud uero, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuo falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo uelle angulum rectũ conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, ut demonſtrabitur in lib. 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendũ erit. Cæterũ tã problema, quã theorema dici conſueuit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponat, ut in exemplis adductis conſtat. Hæc ideo dixerim, ut ſtudioſus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propoſitionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interim uolumina taceam,) conſtant partim problematibus, partim theorematibus. Demonſtrationes problematum ſemper concluduntur, his fere uerbis: Quod faciendum erat: Theorematum uero hiſce: Quod oſtendendum uel demonſtrandum erat; habita nimirum ratione finis utriuſque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonſtrationes continentur & non una tantum, quamuis ultimus ſyllogiſmus demonſtratiuus ſolum concludat id, quod in initio demonſtrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propoſitione, nec non in cæteris omnibus manifeſtum erit.

QVONIAM uero ad demonſtrationes problematum, atque theorematum ſæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, uel problemata minus principalia, & quæ facile ex

le ex ijs, quæ prius demonſtrata ſunt, intelligi poſſunt; inſeruntur interdum a Geometris huiuſmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut breuius demonſtrari poſſint. Vocant autẽ illa Lemmata, propterea quod ſolum aſſumantur ad alias demonſtrationes, non autem de illis præcipua diſputatio inſtituatur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu conſtructio illius, quod ad demonſtrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis aſſumitur, vt demonſtratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM *omnis doctrina, omniſque diſciplina ex præexiſtente gignatur cognitione, ut auctor eſt Ariſtoteles, atque ex aſſumptis, & conceſſis quibuſdã principijs ſuas demonſtret concluſiones; Nulla autẽ ſcientia ex eiuſdẽ Ariſtotelis, aliorumq; philoſophorum ſententia ſua principia demonſtret; habebunt utique & Mathematicæ diſciplinæ ſua principia, ex quibus poſitis, & conceſſis ſua problemata, ac theoremata confirment. Horum autẽ tria tantũmodo genera apud Mathematicos reperiũtur. In prima reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cũ Ariſtotele ſuppoſitiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipſa, nominũ ambiguitate, aut obſcuritate circumuenti in paralogiſmos incidamus. Secundum genus complectitur petitiones, ſiue Poſtulata, quæ quidẽ adeo clara ſunt, & perſpicua in illa ſcientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, ſed auditoris duntaxat aſſenſum expoſcant, ne vlla ſit in demonſtrando hæſitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, ſeu communes animi notiones, quæ non ſolũ in ſcientia propoſita, ſed etiam in omnibus alijs ita manifeſta ſunt, & euidentia, ut ab eis nulla ratione diſſentire queat is, qui ipſa uocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi uidetur accõmodari poſſe id, quod in Metaphyſicis ſcribit de primis principijs Ariſtoteles. A ianua quis aberrabit? Vt præclare a Cicerone, Pronunciata, ſiue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum elementorum præmittit ante demonſtra-*

monſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, ut ex ipſis, quæ quidem facile a quouis intelliguntur, deducat admirandi theoremata, quibus nemo unquam aſſenſum præberet niſi certa, ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibusque ſeculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs, cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectū remota; quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonſtrationibusque certiſſimis ita confirmat, ut nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiuſce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, ut in ipſo quidem introitu ſciētiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque uero oīa principia Geometrica ab Euclide ī his elementis sūt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda, quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuiſſe uideamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus uarijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime curſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe.

ERRATA PRIMI TOMI
SIC CORRIGITO.

Folium.	Linea.	Errata.	Correcta.
39. a.	11.	PROPOS.18.18.	PROPOS.18.19.
40. a.	30.	AEC.	ABC.
52. a.	33.	duo arcus duo arcus.	duo arcus
62. b.	9.	ACDF	BCDF
67. a.	37.	AD	BC
72. a.	37.	4.primi	14. primi
74. a.	9.	pronitur	proponitur
79. a.	23.	33.primi	30. primi
88. a.	24.	FGE	EFG
131. b.	8.	AF	DF
132. a.	15.	eadem	eaſdem
185. a.	22.	figuiras	figuras
229. b.	5.	eorum	earum

INDEX PROBLEMATVM, AC THEOREMATVM, QVAE præter ea, quæ continentur in Euclidis propoſitionibus, in his elementorum libris demonſtrantur.

IN PRIMO LIBRO.

CIRCVLVS bifariam ſecatur a diametro. fol. 8.*b* 1
Omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales. 17.*a* 2
Duæ rectæ lineæ ſpatiũ non cõprehendunt. 18.*a* 3
Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem ſegmentum commune. 18.*b* 4
Super data recta lineæ terminata triangulum Iſoſceles, & Scalenum conſtituere. 22.*b* 5
Omne triangulum æquilaterum eſt æquiangulum. 27.*a* 6
Omne triangulum æquiangulum eſt æquilaterum. 27.*b* 7
Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt. 28.*a* 8
Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrunque vtrique, æqualia, habuerint uero & baſim baſi æqualem; æquiangula inter ſe erunt, & æqualia. 30.*b* 9
Duæ lineæ rectæ ſe mutuo ſecantes efficiunt ad punctum ſectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales. 36.*b* 10
Quotlibet anguli circa vnum & idem punctum conſtituti, quatuor rectis ſunt æquales. 56.*b* 11
Si ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt. 37.*a* 12

13 Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint; erunt quælibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctæ. 37.a

14 Ab vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plures lineæ rectæ, quam duæ, inter ſe æquales. 38.a

15 Ab uno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plures lineæ perpendiculares, quam una. 38.b

16 In omni triangulo, cuius unus angulus fuerit rectus, uel obtuſus, reliqui ſunt acuti. 39.a

17 Omnes tres anguli ſcaleni ſunt inæquales. 39.a

18 Si trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecansq; angulum recta linea ad baſim ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento conuenit, minus vero, quod cum minori. 39. b

19 Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſque ſegmentum erit prope maius latus. folio. 40. b

20 Si trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, baſin bifariam quoque ſecet; erunt duo latera angulum continentia inter ſe æqualia. Quod ſi latera æqualia fuerint, baſim etiam bifariam ſecabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit. folio. 41. a

21 Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit. folio. 49.b

22 Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ inter ſe conuenient ad eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores. 49.b

23 Duæ rectæ lineæ, quæ eidem ſunt parallelæ, inter ſe coeuntes, ſunt in directum conſtitutæ. 51.b

24 Parallelogrammum conſtituere, cuius unus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia. 52.a

25 Si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis & oppoſitis; illa linea erit in directum ipſi lateri conſtituta. 53.b

Omnes

Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas. 53.b 26

Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos. 54.b 27

Si ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur uerſus eandem partem, omnes anguli externi æquales ſunt quatuor rectis. 54.b 28

Si pentagoni ſingula latera producãtur in utranque partẽ, ita ut quælibet duo extra coeant; efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis. 55.a 29

Angulum rectum in tres angulos æquales diuidere. 55.b 30

Omne quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum. 57.a 31

Omne quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum. 57.a 32

Omne quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 57.b 33

In quadrato, & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur a diametro. 58.a 34

In altera parte longiori, & Romboide anguli oppoſiti non bifariam ſecantur a diametro. 58.a 35

In quadrato, & altera parte longiori duæ diametri inter ſe ſunt æquales. 58.a 36

In Rhombo, & Rhomboide duæ diametri ſunt inter ſe æquales. 58.b 37

In omni parallelogrammo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt. 58.b 38

Recta linea ſecans diametrum pallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque. Et recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam. 59.a 39

A quouis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam. 59.b 40

Inter duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cũm illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis. 59.b 41

42 In omni figura rectilinea latera habens numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera & æquiangula; erunt duo qualibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe. 60.a
43 Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemq; partes conſtituta, erunt inter eaſdem parallelas. 61.a
44 Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdẽ partes conſtituta, inter eaſdẽ ſunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 62.a
45 Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, utrumque utrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, ſi quidem ambo ſimul duobus ſint rectis æquales, æqualia ſunt: Si uero duobus ſint rectis maiores, minus illud eſt, quod maiorem habet angulum: Si denique ſint minores duobus rectis, maius illud eſt, quod maiorem angulum habet. 62.b
46 Si a quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum bifariam, triangulum quoque bifariam ſecatur. 64.a
47 A puncto quouis dato in uno latere trianguli propoſiti lineã rectam ducere, quæ bifariam ſecet triangulum datum. 64.b
48 Linea recta ſecans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela. 65.a
49 Omne quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum eſt. 65.b
50 Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta. 66.a
51 Si triangulum duplam habuerit baſim, fueritque in eiſdem parallelis cum parallelogrammo; triangulum parallelogrammo æquale eſt. 66.b
52 Si parallelogrammum & triangulum æquales habuerint baſes, in eiſdemq; fuerint parallelis; duplum erit parallelogrãmum trianguli. 66.b
53 Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem. 66.b
54 Si triangulum & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint

fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si uero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapeziũ maius duplo trianguli. 67.a

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem uero in medio puncto lateris oppoſiti. 67.b 55

Dato parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in dato angulo rectilineo. 68. a 56

Si parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, ita ut ex illis duo aduerſa ſint æqualia; conſiſtent reliqua duo circa diametrum. 69.a 57

Ad datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo. 70.a 58

Datis duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere. 71. a 59

Linearum æqualium æqualia ſunt quadrata: Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ. 71.b 60

Si in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro deſcriptum duplum erit prædicti quadrati. 73.b 61

Quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. 73. b 62

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum unius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 73.b 63

Duobus quadratis inæqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis. 74.a 64

Propoſitis duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus poteſt maior, quam minor. 74.a 65

Propoſitis quotcũque quadratis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 74.b 66

Propoſitis duobus quadratis quibuſcunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita ut tota figura compoſita ſit etiam quadrata. 75.a 67

Cognitis duobus lateribus quibuſcunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 75 a 68

69 In omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogremmo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli dicti producantur. 75.b

IN SECVNDO LIBRO.

1 IN omni parallelogrammo, cuius unus duntaxat angulus detur rectus; erunt & reliqui tres neceſſario recti. 77.a

2 Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis. 79.b

3 Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, una cũ rectangulo ſub una parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo. 80.a

4 Si linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta; quadratum, quod a tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis. 81.a

5 Parallelogrãma circa diametrũ quadrati ſũt quadrata. 83.a

6 Si linea recta fuerit duplæ lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius. 83.b 208.a

7 Si tres lineæ habeant proportionalitatem Arithmeticam; rectangulum ſub extremis contentum, vna cum quadrato exceſſus, æquale eſt quadrato lineæ mediæ. 85.b.

8 Si recta linea in partes inæquales ſecetur, earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur una cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem. 86.b

9 In omni triangulo obtuſangulo, linea perpendicularis ducta

ex

ex quouis acutorum angulorum ad latus oppoſitum cadit in ipſum latus ad partes anguli obtuſi protractum. 91.a

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli deſcribitur, 10
maius ſit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, obtuſus eſt. 91.b

Linea perpẽdicularis ducta a quouis angulo triãguli acutã 11
guli, vel ab angulo recto triãguli rectanguli, vel ab obtuſo triãguli obtuſanguli ad latus oppoſitũ, cadit intra triangulũ. 92.b

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, 12
minus ſit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, acutus eſt. 93.a

Areã cuiuſque triãguli latera habentis nota inuenire. 93.b 13

Dato exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdẽ, 14
inuenire latus ipſius quadrati. 95.a

IN TERTIO LIBRO.

SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam 1
bifariam, & ad angulos rectos ſecet; in ſecante eſt centrũ circuli. 100.a

Linea recta, quæ circulum tangit, ita ut eum non ſecet, in 2
uno tantum puncto ipſum tangit. 100.b

Si intra circulum punctum ſumatur, ab eoque puncto in 3
circulum rectarum linearum cadentium una quidem maxima ſit, vna vero minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter diſtabunt. 103.a

Recta linea a diametri circuli extremitate ad angulos rectos 4
ducta ipſum circulum tangit. 109.b

Quotlibet anguli contactus æquales ſimul ſumpti minores 5.
ſunt quouis angulo acuto rectilineo. 114.b

Aliqua quantitas poteſt continue, & infinite augeri, altera 6
vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius. 115.b

Tranſitur a minori ad maius, vel contra, & per omnia 7

media; & tamen non per æquale. Item reperitur maius hoc, & minus eodem; & tamen non æquale. 115.b. & 126.b

8 A dato puncto in circunferentia circuli rectam lineam ducere, quæ circulum tangat. 116 b

9 Lineæ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. 116. b

10 Propoſitis duobus circulis, quorum neuter alterũ includat, rectam lineam ducere, quæ vtrunque tangat circulum. 116.b

11 In circulo ſpatiũ ad centrũ duplex eſt anguli ad peripheriã, cum fuerit eadem peripheria baſis ſpatij & anguli. 118.b

12 Si in quadrilatero anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circulus, qui per tres quoſcunque eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum quartum angulum; atque adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poterit. 120.a

13 Segmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, uel ſuper eandem conſtituta, ſunt ſimilia. 121.a

14 In æqualibus circulis, inæquales anguli inæqualibus peripherijs inſiſtunt, maior maiori, & minor minori, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. 122.b

15 In æqualibus circulis anguli, qui inæqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, ſiue ad cẽtra, ſiue ad peripherias cõſtituti inſiſtãt. 123.a

16 Duæ rectæ lineæ, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuo non ſecantes, ſunt parallelæ. 123.b

17 Linea recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriã illam ſubtendit. 123.b

18 In æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo; At vero ſi de ſegmentis circuli maioribus ſermo habeatur, maior minorem, & minor maiorem. 124.a

19 In æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales rectæ lineæ ſubtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, ſi de ſegmentis ſemicirculo minoribus fiat ſermo; At vero ſi de ſegmentis ſemicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & maiorem minor. 124.b

20 Angulꝰ triãguli, q̃ reliq̃s duobꝰ æqualis exiſtit, rectꝰ eſt. 126.b

Segmen-

Segmentum circuli, in quo angulus conſtitutus eſt rectus, ſemicirculus eſt. 126.b. 21

Si angulo recto recta ſubtenſa bifariam ſecetur, & ex puncto diuiſionis circulus deſcribatur ad interuallum dimidiæ ſubtenſæ; circulus tranſit per angulum rectum. 127.a. 22

Si linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum ſecantis fecerit cum ipſa angulos æquales iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis; Linea ducta circulum tanget. 127.b. 23

Si duæ rectæ ita ſe ſecent, ut rectangulum ſub unius ſegmentis comprehenſum æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius cō prehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus. 129.b. 24

Si a puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur; rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus, inter ſe ſunt æqualia. 130.b. 25

Duæ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter ſe ſunt æquales. 131.a. 26

Ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſunt duæ lineæ, quæ circulum tangant. 131.a. 27

IN QVARTO LIBRO.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam. 133.b. 1

Si circulo circa triangulum deſcripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum eſt acutangulum: Si uero in unum latus trianguli, rectangulum: ſi denique extra triangulum, obtuſangulum. 135.b. 2

Centrum circuli circa triangulum acutangulum deſcripti intra triangulum cadit: circa rectangulum uero, in latus recto angulo oppoſitum: circa obtuſangulum denique, extra triangulum. 135.b. 3

Per data tria puncta non in una recta linea exiſtentia circulum deſcribere. 135.b. 4

Si circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inſcribatur; erit quadratum circunſcriptum 5

ſcriptum quadrati inſcripti duplum. 137.a.

6 Super data recta linea terminata pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum conſtituere. 138.b.

7 Latus hexagoni æquale eſt ſemidiametro circuli, in quo deſcribitur. 140.b.

8 Si in circulo ab eodẽ puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum; continebit arcus inter dicta latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter ſe differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inſcribenda tot latera, anguloſque æquales, quot unitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur. 141.b.

9 Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, aut circunſcripta, eſt quoque æquiangula. 142.a.

10 In circulo una eadem opera facilius, quam ab Euclide traditum eſt, pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 143.a.

11 Si bifariæ ſectiones laterum figuræ æquilateræ & æquiangulæ rectis coniungantur lineis; inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idẽ centrũ habẽs. 143.a.

IN QVINTO LIBRO.

1 ANGVLVS curuilineus rectilineo æqualis eſſe poteſt. 154.a.

2 Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertendo proportionales erunt. 166.a.

3 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æquemultiplices primæ & tertiæ ad ſecundam, & quartam magnitudines eandem habebunt rationem: Nec non æquemultiplices ſecũdæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ; Nec non prima & tertia ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ. 166.b.

4 AEquales magnitudines ad æquales eandem habent rationem. 169.a.

5 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam minorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam

minorem

minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam. 172.a.

Si prima ad ſecundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam; Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam. Quod ſi prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam. 172.a. 6

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam ſecunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. 174.a. 7

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 175.b. 8

Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem; & reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt. 178.b. 9

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam dupla reliquæ. 179.b 10

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionē, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 179.b. 11

Si prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 180.a. 12

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque uiciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quā ſecunda ad quartam. 180.a. 13

Si prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque uiciſſim prima ad tertiam minorem proportionē, quā ſecunda ad quartam. 180 b 14

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam. 180.b. 15

Si prima ad ſecundā habuerit minorem proportionem, quā tertia ad quartam; habebit quoq; compoſita prima cū ſecunda ad ſe- 16

ad ſecundam minorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam. 181.a.

17 Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam. 181.a.

18 Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam minorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam. 181.b.

19 Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam compoſita tertia cũ quarta ad quartam; habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam. 181.b.

20 Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam; habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam. 182.a.

21 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiã maior, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam. 182.a.

22 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque minor proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam minor, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quã primæ poſteriorum ad tertiam. 182.b.

23 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam. 183.a.

24 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq;

ſitque minor proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam minor, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam. 183.*a.*

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum; Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum. 183.*b.* 25

Si fuerit minor proportio totius ad totum, quã ablati ad ablatum, Erit & reliqui ad reliquum minor proportio, quam totius ad totum. 183.*b.* 26

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quam ultima priorum ad ultimam poſteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum. 184.*a.* 27

IN SEXTO LIBRO.

PROPOSITIS *quotcunque quantitatibus, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus omnibus intermedijs, ut ex proportione primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, &c.* 188.*a.* 1

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, ut baſes, eandem habent altitudinem, æqualeſue. 190.*b.* 2

Triangula & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, uel eadem, ita ſe habent inter ſe, ut altitudines. 191.*a.* 3

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe ut altitudines, æquales habent baſes. 191.*a* 4

Linea recta, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo aufert triangulum toti triangulo ſimile. 193*b.* 5

Si ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandẽ, quam recta inter ipſas, & alterum extremum incluſæ: Recta coniun- 6

coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ. 193.b.
7 Si in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulũ oppoſitum recta educatur linea; diuidentur linea parallela, & latus dictum in eaſdem rationes. 194.a.
8 Recta perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim demittitur, eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale eſt inter totam baſim, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet. 197.a.
9 Datam rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere. 198.a.
10 Datam rectam lineam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. 199.a.
11 Si duæ rectæ lineæ ſecentur in binis pũctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus. 199.b.
12 Datis duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione reperire. 200.b.
13 Tribus datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, ut prima ad ſecundam. 201.a.
14 Recta linea, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circunferentiam uſque, media eſt proportionalis inter duo diametri ſegmenta, quæ a perpendiculari facta ſunt. 201.a.
15 Data recta linea, aliam rectam, (quæ minor non ſit, quã dupla illius) ita ſecare, ut data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius. 201.b.
16 Recta linea media proportionalis eſt inter alias duas rectas lineas, quæ cõprehẽdũt rectãgulũ quadrato illius æquale. 204.a
17 Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut eſt prima ad tertiam, ita eſt triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterque deſcriptum; Item triangulum ſuper ſecundam ad triangulum ſuper tertiam ſimile ſimiliterque deſcriptum. 206.a.
18 Polygona ſimilia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, ductis e centris circulorũ ipſa circunſcribentiũ ad omnes angulos rectis lineis. 207.b.

Si fue-

Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; ut eſt prima ad tertiam, ita eſt polygonum ſuper primam deſcriptum ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum. 208.a. 19

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, conſtituta ſunt ſuper æquales rectas lineas. 209.b. 20

Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis, prportionalia. Et ſi a tribus rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea proportionalia fuerint; ipſæ etiã rectæ proportionales erũt. 210.a. 21

Triangula, quæ unum angulũ uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam. 211.a. 22

Proportionem ex duabus proportionibus, uel pluribus componere. 211.b. 23

Proportionem minorem ex maiori auferre. 211.b. 24

Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur. 212.a. 25

Parallelogramma inter ſe æquiangula eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa. 212.a. 26

Triangula & parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. 212.b. 27

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus; ex quouis illorum alteri ſimile reſecare. Item quoduis ipſorum augere, ut fiat ſimile alteri. 214.b. 28

Dato parallelogrammo, deſcribere aliud maius aut minus ſimile illi, ſimiliterque deſcriptum. 215.a. 29

Si ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiẽs quadrato; ipſum applicatũ æquale eſt rectangulo, quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factis continetur. 219.b. 30

Si figura, quæ ab uno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis; Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt. 222.a. 31

Sector ad ſectorem eſt, ut angulus ad angulum. 224.b. 32

Angulus ad centrum circuli ita eſt ad quatuor rectos, 33

ut arcus illi ſubtenſus ad totam circunferentiam. Et contra, Ita ſe habent quatuor recti ad angulum in centro, ut tota circunferentia ad arcum illi angulo ſubtenſum. 224.b.

35 Similia ſegmenta circulorum eandem proportionem habent ad integras circunferentias circulorum, ac propterea qualis pars eſt una circunferentia totius ſuæ circunferentiæ, talis quoque eſt alia circunferentia ſimilis totius ſuæ circunferentiæ 225.a.

36 Anguli inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus, ſiue ad centra, ſiue ad circunferentias inſiſtant, æquales ſunt inter ſe. Et arcus. quibus inſiſtunt ſiue ad centra, ſiue ad circunferentias, anguli æquales, ſimiles ſunt. 225.b.

37 A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum. 226.a.

38 Duobus datis rectilineis, tertium proportionale inuenire. 227.a.

39 Tribus datis rectilineis, quartum proportionale inuenire. 227.a.

40 Duobus datis rectilineis, medium proportionale inuenire. 227.a.

41 Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantque inter ſe proportionem quamcunque. 227 b.

42 Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam. 228.a.

43 Duobus datis rectilineis, æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitũ cuiuis rectilineo dato. 228.b

44 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint; Erunt ſegmenta unius ſegmentis alterius reciproca. 229.a.

45 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes; Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum exterius. 229.a.

46 Si duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, & a duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur, Erunt duæ

duæ lineæ, quarum vna inter terminum & ſectionẽ, altera vero inter eundem terminum et ſuam perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ. 229.b

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuo ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. 230.a 47

Omne quadrilaterum a duabus diametris ſe mutuo ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia. 230.a 48

A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam. 230. a 49

Imperatam partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducitur. 230.b 50

Dato rectilineo, ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere maius, vel minus, ſecundum proportionem datam; Atque adeo quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicare, triplicare, quadruplicare, &c. Et aliud conſtituere, quod ſit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, &c. ſeruata nihilominus ſemper eadem rectilineorum ſimilitudine. 231.a 51

In dato triangulo quocunque quadratum deſcribere. 232.a 52

IN SEPTIMO LIBRO.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione; nunquam reliquus metietur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas. 246.a 1

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem uſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 246.b 2

An duo numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne, conſiderare. 246.b 3

Numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorũ communem menſuram. 247.b 4

An quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne, conſiderare. 247.b 5

Numerus metiens tres numeros, vel etiam plures, metitur & maximam eorum communem menſuram. 248.b 6

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius 7

alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas, uel vnitas & numerus ſimul, utriuſque numeri ſimul eadem pars erit quæ vnitas numeri. 249.b

8 Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars; Et omnes omniũ ſimul eadem pars erunt, quæ unus unius. Idemque ſequitur, ſi loco unius numerorum priorum ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates. 250.a

9 Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualiũ numero, ſinguli ſingulorum, æquemultiplices; quam multiplex eſt vnius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omniũ. Idemq; ſequit̃, ſi loco vniꝰ numerorũ poſteriorũ aſſumat̃ vnitas, vel loco pluriũ, vel etiã omniũ, plures unitates. 250.b

10 Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ unus unius. 251.a

11 Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atq; ablatus ablati; Etiã reliquus reliq ita multiplex erit ut totus totius. 252.a

12 Si primus ſecundum æqualiter contineat, atque tertius quartum, eandemque inſuper partem, uel partes; Erit e contrario ſecundus primi eædem partes, quæ quartus tertij. Et ſi fuerit primus ſecundi eædem partes, quæ tertius quarti; continebit e contrario ſecundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque inſuper partem, vel partes. 254.b

13 Quæ proportiones numerorum eidẽ proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſunt eædem. 259.a

14 Si numerus quotcunque numeros multiplicet, uel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdẽ rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes. 261.b

15 Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 262.a

16 Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædẽ ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, &c. 263.b

17 Si quatuor numeri proportionales ſint; Et conuertendo proportionales

portionales erunt. 264.b

Si compoſiti numeri proportionales ſint; Hi quoque diuiſi 18
proportionales erunt. 265.a

Si diuiſi numeri proportionales ſint; Hi quoque compoſiti 19
proportionales erunt. 265.a

Si compoſiti numeri proportionales ſint; Hi quoque per con- 20
uerſionem rationis proportionales erunt. 265.a

Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quā ter- 21
tius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum ean
dem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus pri
mus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam
tertius cum ſexto ad quartum. 265.b

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; 22
& detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad
eoſdem eandem rationem habebunt. 256.a

Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam 23
tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum
eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitū
ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius
ad quartum cum ſexto. 266.a

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, 24
quas alij illis multitudine æquales ad quendam aliū eundem:
Habebunt quoque illi omnes ſimul ad eundem proportionem,
quam omnes hi ſimul ad eundem. Et ſi idem numerus ad quot
cunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad
alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus
ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem numerus ad hos
omnes ſimul. 266.b

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in cōtinua 25
tione ſuarū proportionū. Et quotcunque numeri in cōtinuatio-
ne ſuarū proportionū minimi, ſunt inter ſe primi. 268.a

Numerus, qui ex duobus compoſitus ad unum illorum pri- 26
mus eſt, ad reliquum quoque eſt primus. 270.b

Si duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; 27
genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus,
vel certe ad ipſum ſit compoſitus; Is ad unum eorum, qui in
principio, compoſitus erit. 271.b

Maxima mēſura quotlibet numerorū metitur ipſos p nume- 28
ros, qui minimi ſunt eandē proportionē cū ipſis habentiū. 273.a

29 *Duos minimos numeros inuenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales.* 273.a

30 *Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, producitur numerus minimus, quem illi metiantur.* 274.a

31 *Si tres numeri numerum quempiam metiantur; metietur & eundem minimus numerus, quem illi metiuntur.* 275.a

32 *Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus eſt habens partes a numeris metientibus denominatas.* 276.b

33 *Numerum reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars ſubſequentem partem contineat.* 277.b

IN OCTAVO LIBRO.

1 *SI tres numeri minimi ſint continue proportionales, erunt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, cubi. folio.* 280.a

2 *Extremi numeri proportionalium quotcunque ſecundum doctrinam propoſ. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter ſe primi ſunt.* 280.a

3 *Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.* 280.b

4 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex; neque alius quiſquam vllius multiplex erit.* 285.a

5 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit. folio.* 285.a

6 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex; neque primus ſecundi multiplex erit.* 285.b

7 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem,*

autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit. 286.b

Inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, 8
vel ſuperbipartientis, non poteſt cadere numerus medius proportionalis. 287.a

Si numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit; & rur- 9
ſum multiplicet productum, & ſic deinceps; erunt omnes producti continue proportionales ab vnitate. 289.a

Si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportio- 10
nales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producit tertiũ, & ex eodem in hunc fit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & ſic deinceps. 290.a

Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue propor- 11
tionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 290.a

Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum con 12
tinue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps uno amplius. folio. 290.b

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſum- 13
ptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipſorum, & aſſumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 291.b

Inter duos quadratos numeros cadit numerus medius propor 14
tionalis in continua proportione lateris ad latus. 292.b

Numerus medius proportionalis inter duos quadratos, & 15
quilibet ipſorum quadratorum, compoſiti inter ſe ſunt. 292.b

Inter duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in 16
continua proportione lateris ad latus. 293.b

Duo numeri medij proportionales inter duos cubos, & quili- 17
libet ipſorum cuborum, inter ſe compoſiti ſunt. 293.b

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi ſit 18

multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit: Et ſi unius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex. 296.b

19 Inter duos ſimiles planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, quorum officio medius proportionalis inquiritur. 297.b

20 Numerus medius proportionalis inter duos planos ſimiles, & quilibet ipſorum planorum, ſunt inter ſe compoſiti. 297.b

21 Inter duos ſimiles ſolidos cadunt duo medij proportionales in ratione laterũ homologorum, quorũ officio medij proportionales inueſtigantur. 298.b

22 Duo numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, & quilibet ipſorum ſolidorum, inter ſe ſunt compoſiti. folio. 298 b

23 Proportio cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerũ non quadratum exhiberi nullo modo poteſt in duobus numeris quadratis. 301.b

24 Numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. 302.b

25 Proportio cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, reperiri non poteſt in duobus numeris cubis. folio. 303.a

26 Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt. 303.b

27 Plani numeri non ſimiles proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. 303.b

28 Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles. 304.a

29 Nulli numeri habentes duplam proportionem, vel ſeſquialteram, vel ſuperbipartientem, ſunt ſimiles plani, vel ſolidi. folio. 304.a

30 Nulli numeri primi ſunt plani ſimiles, vel ſolidi. folio. 304.a

31 Duos numeros planos, uel ſolidos non ſimiles inuenire. folio. 304.b

IN

IN NONO LIBRO.

SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit. 305.b 1

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit. folio. 305 b 2

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit. 306. a 3

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem; productus non quadratus erit. folio. 306.a 4

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus non cubus erit. 307.a 5

Si cubus numerus numerum quẽdam multiplicans faciat nõ cubum; & multiplicatus non cubus erit. 307.a 6

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; tantum diſtabit quilibet maior numerus acceptus ab aſſumpto quouis minore, quantum ab vnitate abeſt is numerus, per quem minor maiorem metitur. 311.b 7

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quilibet illorum ſeipſum multiplicans producit numerum, qui tantum ab eo diſtat in numeris proportionalibus, quantum ipſe ab vnitate. Minor uero quiuis maiorem quempiam multiplicans producit numerum, qui tantum a maiore diſtat, quantum minor ab vnitate. 311.b 8

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque numerus primus vltimum metiens, metitur etiam omnes alios ante vltimum. 313.a 9

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens compoſitus erit ad alterum duorũ numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi. 314.b 10

Si fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continetur. 315.b 11

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani 12

ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui a toto efficitur. 316.a

13 Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & una parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub patibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur. 316.a

14 Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur. 316.b

15 Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cũ numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur. 316.b

16 Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio, & adiecto componitur. 317.a

17 Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis eſt numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis. folio. 317.b

18 Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte. folio. 317.b

19 Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui a partibus inæqualibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. 318.a

20 Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus cõpoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio & adiecto. 318.b

21 Fieri non poteſt, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. 318.b

22 Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi

nimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi. folio. 320.a

Propoſitis quotcunque numeris cõtinue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi, conſiderare. 322.b 23

Si ſint quatuor numeri proportionales, ſed non deinceps, quorũ primus & tertius, primi inter ſe ſint, fieri non poteſt, vt detur alius, ad quẽ ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium. 323.b 24

Primis numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum. 324.a 25

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 326.a 26

Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur. 326.b 27

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 326.b 28

Omnes numeros pariter pares tantum inuenire. 327.b 29

Omnes numeros pariter impares tantum inuenire. 328.b 30

Omnes numeros, qui & pariter pares ſint, & pariter impares, inuenire. 329.a 31

Quotcunque numerorum continue proportionalium, quorum primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti, ſummam inuenire. 329.b 32

Omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, inuenire. folio. 331.a 33

IN DECIMO LIBRO.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur. folio. 8.b 1

Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; Metietur quædam reliqua præcedentem. 9.a 2

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem. 9.b 3

An quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec 4

nec, conſiderare. 10.a.

5 Magnitudo metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem. 11.a

6 Si ſint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 11.a.

7 Commenſurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis menſura maxima ipſas metitur. 12.b

8 Lineam rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data rectæ linea, ut numerus ad numerum. 13.b.

9 Lineam rectam inuenire, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. 13.b.

10 Si ſint quotuis quantitates continue proportionales, & aliæ totidem continue quoque proportionales; ſitque ut prima illarum ad ultimam, ita prima harum ad vltimam: Erit & ut prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam. 14.b.

11 Rectæ lineæ, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt: Quæ uero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ uero potentia incommenſurabiles, omnia & longitudine incommenſurabiles ſunt. 16.b.

12 Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 20.a.

13 Quotlibet numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 20.a.

14 Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantũ commenſurabiles, utrilibet illarum incommenſurabilis eſt longitudine & potentia. 21.b.

15 Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera uero ſit uni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis. 22.b.

16 Quæ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter

ſe in-

ſe incommenſurabiles erunt. 23.b.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor. 24.a. 17

Duabus datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt. 24.b 18

Si tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliqua commenſurabilis eſt. 25.b. 19

Si tota magnitudo ex duabus compoſita, incommenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 26.a. 20

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammũ deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur. 26.b 21

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata. 27.a. 22

Datam rectam lineam ita ſecare, ut rectangulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum a dimidia linea deſcriptum. 27.b. 23

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. 28.a. 24

Quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles inuenire. 32.a. 25

Rationales lineæ non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. 32.a. 26

Si ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima. 32.b. 27

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile; & ipſum Rationale eſt. 32.b. 28

Recta linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt. 34.a 29

Quoi cun-

30 *Quotcunque lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles inuenire.* 34.b.

31 *Propoſitis quotcunque Rationalibus lineis potentia ſolum commenſurabilibus, inuenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum.* 35.a.

32 *Linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, Media eſt.* 36.a.

33 *Omne ſpatium Medium æquale eſt cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, ſi ipſum ſub talibus iam non contineatur.* 37.b.

34 *Spatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt.* 38.b.

35 *Duas rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.* 39.a.

36 *Rectangulum ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus contentum, neque Rationale eſt, neque Medium, ſed æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* 40.b.

37 *Rationale ſuperat Rationale Rationali.* 42.a.

38 *Duos numeros planos ſimiles inuenire.* 43.a

39 *Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.* 43.a.

40 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus ſit etiã numerus quadratus.* 43.b.

41 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceßus non ſit numerus quadratus.* 44.a.

42 *Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.* 44.a.

43 *Duos numeros inuenire, ita ut ex illis compoſitus ad neutrũ ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* 46.a.

44 *Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorẽ, ita rectangulum ſub ipſis contentum ad quadratum mnoris. Et ut minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratũ maioris.* 47.b

45 *Si ſint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectãgulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.* 48.b

46 *Si recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars*

ior pars ad minorem ; ita rectangulum ſub tota & maiore par-
te, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum. 50.a.
Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifa 47
riam ; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectangu
li, quod ſub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.
Et ſi maior bifariam ſecetur; erit rectangulum ſub ipſis conten
tum duplum rectanguli, quod ſub minori linea, & dimidia
parte maioris continetur. 50.b.
Fieri poteſt, ut duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium 48
Rationale. 51.b.
Duo ſpatia Rationalia Rationale ſpatium componunt. 52.a. 49
Inuenire duas Medias longitudine & potentia incommenſu 50
rabiles. 53.a.
Quod ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectan 51
gulum, Irrationale eſt. 54.b.
Si recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex qua 52
dratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis cō
prehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſu-
perat : Ac propterea quadrata partium inæqualium ſimplici-
ter ſunt maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus
continetur. 56.a.
Si recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in a- 53
lias partes inæquales ; erunt quadrata partium magis inæqua-
lium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſi-
mul. 57.b.
Si recta linea ſecta ſit utcunque ; erit rectangulum ſub par 54
tibus contentum, medium proportionale inter earum quadra-
ta : Item rectangulum contentum ſub tota, & una parte, me-
dium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadra
tum dictæ partis. 67.a.
Ei, quæ eſt ex binis nominibus, potentia tantum commenſura 55
bilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, ſed non ſemper ordine ea-
dem. 77.a.
Ei, quæ eſt ex binis Medijs, potentia tantum commenſura 56
bilis, & ipſa ex binis Medijs eſt, atque ordine eadem. 78.b.
Recta linea, quæ ex binis nominibus, & reliquæ Irrationa-
les ipſam ſubſequentes, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe ea-
dem ſunt. 81.b.
Recta linea media proportionalis ſecundum Analogiam 57
Arithme-

Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, quæ per compoſitionem fit, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit. 82.b.

59 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.* 83.b.

60 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.* 84.a.

61 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.* 85.a.

62 *Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.* 85.b.

63 *Si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficient.* 86.b

64 *Si a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.* 87.a.

65 *Si idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem; & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiã, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.* 87.b.

66 *Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam.* 87.b.

67 *Recta linea Apotomæ potentia tantum commenſurabilis, & ipſa Apotome eſt, ſed non ſemper ordine eadem.* 105.a

68 *Apotome, & cæteræ ipſam conſequens Irrationales lineæ, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe ſunt eædem.* 110.a

69 *Fieri poteſt, ut ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus.* 114.a.

70 *Non ſolum lineas, ſed magnitudines etiam planas, atque ſolidas incommenſurabiles eſſe.* 116.a.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 A PVNCTO *in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur.* 136.a.

Si fuerint

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum 2
eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit. 136.b.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, paralle- 3
lum planum ducere. 137.b.

Quæ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt paralle- 4
la. 138.a.

Duo plana alteri plano parallela, quæ inter ſe conueniunt, 5
unum planum efficiunt. 138.b.

Si priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis paral- 6
lo, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſoli-
dum. 146.b

Si priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis paral- 7
lelo; ſectio eſt figura æqualis, & ſimilis planis oppoſi-
tis. 148.a.

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue in- 8
ſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem
ſunt altitudine. 151.b

Solida parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in ea- 9
dem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem al-
titudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem
baſim. 153.b.

Si ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, ut baſes, ipſa erunt 10
ſub eadem altitudine. 154.b

Si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut 11
eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper primam
deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; deſcriptum
ſuper ſecundam. 155.a.

Priſmata, quorum baſes ſunt triangula ſuper eandẽ baſim, 12
uel æquales, & in eadẽ altitudine, ſunt inter ſe æqualia. 157.a

Priſmata, quorum baſes ſunt triangula, ſub eadem altitu 13
dine, inter ſe ſunt, ut baſes. 157.a.

Similia priſmata, quorum baſes ſunt triangula, inter ſe ſunt 14
in triplicata ratione homologorum laterum. 157.a.

Æqualium priſmatum, quorũ baſes ſunt triangula, baſes 15
& altitudines reciprocantur. Et quorum priſmatum triangu
lares baſes habentium baſes & altitudines reciprocantur, illa
ſunt æqualia. 157.a

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum uertici- 16
bus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum
lineis

lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrunque vtrique; erunt a punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. 158.b

17 Si parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum æquale fuerit paralledipedo ſibi æquiangulo a media linea deſcripto; erunt tres rectæ lineæ continue proportionales. folio. 159.a

18 Si fuerint tres rectæ proprtionales, erunt & parallelepipeda ſimilia, ſimiterque deſcripta ex eis, proportionalia. Et ſi tria ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

19 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & priſmata triangulares baſes habentia, quæ ab ipſis & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi priſmata triangulares baſes habentia, quæ & ſimilia ſimiliterque deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. 160. b

20 Si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & priſmata triangulares baſes habentia, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia. Et ſi tria priſmata triangulares baſes habentia, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 160. b

21 In omni parallelepipedo diametri ſe mutuo bifariam ſecant in vno puncto. 162. a

22 Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam; per centrum tranſibit ipſum planum. 162.a

IN DVODECIMO LIBRO.

1 CIRCVLVS ad circulum eſt, ut polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcripto. 166. b

2 Si pyramides triangulares inter ſe ſint ut baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. 170.a

3 Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes

baſes triangulares conſtitutæ, ſunt inter ſe æquales. 170.b
Pyramides triangulares æquales ſuper eandem, uel æquales 4
baſes, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangula-
res æquales, eandemque habentes altitudinem, baſes habent
æquales, ſi non eandem. 170.b
Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, ut baſes, 5
eandem habent altitudinem. 172.a
Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multan- 6
gulas, vel eandem conſtitutæ, ſunt inter ſe æquales. 172.a
Pyramides multangulæ æquales, & ſuper æquales baſes, vel 7
ſuper eandem conſtructæ, eandem habent altitudinem. Et pyra-
mides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem,
æquales habent baſes, ſi non habuerint eandem. 172.a
Pyramis quæcunque tertia pars eſt priſmatis, quod eandem 8
cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodcun
que triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & ba-
ſim, & altitudinem. 172.b
Sub eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcunque ha- 9
beant baſes, inter ſe ſunt, ut baſes. 173.b
Si priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, ut baſes; ip- 10
ſa erunt ſub eadem altitudine. 174.a
Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales ba 11
ſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. 174.a
Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, uel eandem, in eadem 12
ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes
habent æquales, ſi non habuerint eandem. 174.a
Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, 13
continent, habent proportionem homologorum laterum tripli-
catam. 175.a
Priſmata ſimilia habent triplicatam proportionem homolo- 14
gorum laterum. 175.b
Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides 15
triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis.
folio. 176.a
Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimi- 16
lia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homolo
ga totis. 176.a
Aequalium pyramidum, quarum baſes non ſint triangula- 17
res; reciprocantur baſes, atque altitudines. Et quarum pyrami-

dum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes, & altitudines, illæ ſunt æquales. 177.a

18 *Aequalium priſmatum quorumlibet reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum priſmatum baſes, atque altitudines reciprocantur, illa ſunt æqualia.* 177.b

19 *Omnis conus, ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri, ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni, & cylindri.* 180.a

20 *Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, inter ſe proportionem habent, quam baſes.* 181.a

21 *Si coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes, ipſi ſub eadem altitudine erunt.* 181.b

22 *Coni & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandē, vel æquales baſes conſtituti, ſiue ambo ſint recti, uel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, ſunt inter ſe æquales.* 181.b

23 *Coni et cylindri æquales ſuper eandē, uel æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et coni & cylindri æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem.* 181.b

24 *Similes coni & cylindri ſcaleni, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.* 183.a

25 *Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri ſcaleni, vel etiam ſi vnus conorum, ue l cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, inter ſe ſunt, vt altitudines.* 185.a

26 *Super æqualibus baſibus exiſtentia priſmata, parallelepipeda, & pyramides, inter ſe ſunt, vt altitudines.* 185.b

27 *Coni & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habent æquales.* 186.b

28 *Aequalium conorum, & cylindrorum, ſiue ambo tam coni, quam cylindri ſcaleni ſint, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, ſiue ambo tam coni, quam cylindri ſint ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur, illi ſunt æquales.* 187.b

29 *Si, duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo poygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris*

lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad dia-
metrum perpendicularis ducatur; hæc nullo modo circulum
minorem tangit, ſed extra ipſum cadit. 188.b

Duo polyedra ſimilia in duabus ſphæris deſcripta proportio- 30
nem habent triplicatam eius, quam habent ſphærarum diame-
tri. 191.a

Sphæra ad ſphæram eſt, ut polyedrum in illa deſcriptum ad 31
polyedrum ſimile in hac deſcriptum. 193.b

IN TERTIODECIMO LIBRO.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens 1
dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod a
dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa li-
nea ſecta erit extrema & media ratione. 197.a

Si recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, 2
vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex ma-
iore ſegmento deſcripti; Recta illa linea extrema ac media ra-
tione ſecabitur. 198.a

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detraha- 3
turque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſeg-
mentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmen-
tum erit illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.
folio. 199.a

Si linea recta ſecetur extrema ac media ratione, atque ex 4
dimidio illius auferatur dimidium maioris ſegmenti; Erit
quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, ma-
iuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius li-
neæ. 199.b

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſece 5
tur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſeg-
mentum Apotome. 200.a

Si latus hexagoni in quopiam circulo deſcripti ſecetur extre 6
ma & media ratione, maius illius ſegmentum eſt latus decago
ni in eodem circulo deſcripti. 202.b

Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmen- 7
tum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſeg-
mentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus
ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius

ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli. 202.b

8 *Linea recta, quæ ex centro circuli ducta diuidit arcum quẽpiam bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos.* 204.b

9 *Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni in eo deſcripti ducta diuidit & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum, bifariam, & ad angulos rectos.* 204.b

10 *In dato circulo pentagonum, & decagonum una eademque opera deſcribere.* 204.b

11 *Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.* 207.a

12 *Si ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctũ lineæ perpendicularis.* 208.b

13 *Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti.* 209.a

14 *Linea perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri.* 209.a

15 *In octaedro tres diametri ſe mutuo ad angulos rectos ſecant in centro ſphæræ; nec non & tria quadrata ex lateribus octaedri compoſita ſe mutuo ad angulos rectos ſecant.* 210.b

16 *Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles, & æquales, quarum baſis communis eſt quadratum ex octaedri lateribus compoſitum.* 210.b

17 *Si tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. folio.* 210.b

18 *Baſes octaedri oppoſitæ ſunt parallelæ.* 211.a

19 *Omnes diametri cubi inter ſe ſunt æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecant; nec non & rectæ lineæ, quæ cẽtra baſium cubi oppoſitarum coniungunt, bifariam diuiduntur in eodem centro.* 212.a

20 *Potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentijs laterum*

terum tetraedri, & cubi ſimul ſumptis. 212.b

Sphæræ diameter potentia eſt quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri pentagonum conſtituentia ambientis. 215.b 21

Sphæræ diameter compoſita eſt ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli, qui circa quinque Icoſaedri latera deſcribitur. 215.b 22

Latera Icoſaedri oppoſita ſunt parallela. 215.b 23

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. 219.a 24

Latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. 219.a 25

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum eſt latus dodecaedri, maius ſegmentum eſt latus cubi eiuſdem ſphæræ. 219.a 26

In Dodecaedro ſunt ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, biſariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſe ſe in centro dodecaedri biſariã quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. 219.a 27

Si recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri biſariam, & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſt latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadẽ ſphæra comprehenſi. 219.a 28

Præter quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc lib. conſtruxit, nullum aliud dari poteſt. 222.b 29

IN QVARTODECIMO LIBRO.

LINEA *perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineã rectam in eodem circulo aptatam, ſecat arcum, quem dicta hæc linea ſubtendit, biſariam.* 226.a 1

Perpendicularis linea ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis eſt vtrique lineæ ſimul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus triãguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. 226 b 2

Si linea perpendicularis e xcentro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eo- 3

dē cētro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum. 227.a

4 Si in ſphæra eadem cubus, et dodecaedrum inſcribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris dodecaedri, utraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum dodecaedri circunſcribentis. 228.a

5 Si latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli. 228.a

6 Superficies cuiuslibet dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, et perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. 231.a

7 Si ex centro circuli triangulum tetraedri circunſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum ſexies ſumptum, ſuperficiei tetraedri æquale. 231 a

8 Si ex centro circuli triangulum octaedri circunſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri æquale. folio. 231.a

9 Si ex centro circuli quadratum cubi circunſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus quadrati; erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies ſuptum, ſuperficiei cubi æquale. 231.a

10 Rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulō trianguli Icoſaedri ad unum eius latus ducta, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, æquale pentagono dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti. 232.b

11 Quam proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdē ſphæræ, eandem habent latera cubi, & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum. 234.b

12 Superficies dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habet eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri

dri in eadem ſphæra cum ipſis, ut uult propoſ. 9. huius lib. ſed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra. 235.a

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit. 235.a 13

Si planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra. Si uero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planũ ſecans ducta. 235 b. 14

Circuli in ſphæra æquales, æqualiter diſtant a centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes a centro ſphæræ, æquales ſunt. 236.a 15

Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, et eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmẽtum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdẽ ſphæræ. 237.b 16

Latus trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deducta. 237.b 17

Linea perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſa ſecat & angulum, & latus bifariam. 238.a 18

Si ſphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tam ſuperficies tetraedri, quam octaedri in ea ſphæra, Media. 238.a 19

Omne triangulum æquilaterum, cuius latus ſit Rationale, eſt ſuperficies Media. 239.a 20

Si tetraedrum, atque octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis tetraedri ſeſquitertia baſis octaedri: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei tetraedri. 239.a 21

Recta linea ex angulo quouis tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad dictam baſim. 239.b 22

Octaedrum in ſphæra deſcriptũ diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis uero utriuſque eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. 239.b 23

Tetraedrũ ſphæræ impoſitũ ad octaedrũ in eadẽ ſphæra deſcri- 24

ptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente uigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ.

Vel ut Campanus ait.

Tetraedrum ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, ut rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partiū lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimasſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentū, ad quadratum diametri ſphæræ. 241.a

25 *Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa, tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.* 243.a

26 *Linea perpendicularis ex quolibet angulo triāguli æquilateri ad baſim oppoſitā ducta, ſeſquialtera eſt eius, quæ inter centrū triāguli, & dictū angulū interijcitur: Hæc autē inter cētrū triāguli, et dictū angulū interiecta, dupla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro triāguli ad baſin eiuſdē ducitur.* 243.b

27 *Si octaedrum ſphæræ inſcribatur; erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim quamcunque octaedri deducitur.* 243.b

28 *Duplum quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: perpendicularis autem a centro ſphæræ in aliquam baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.* 244.a

29 *Solidū, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictū cubū cōprehendētis, æquale eſt cubo. Vel ſolidū, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſt cubo.* 244.b

30 *Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuſcunq; corporis regularis ad aliquā eius baſim ducta, in tertiā partē ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt ꝓpoſito corpori regulari.* 244.b

31 *Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, et octaedri triangulum eiuſdem ſphæræ.* 245.a

Lineæ perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri in eadem ſphæra circunſcribunt, æquales ſunt. 245.b

32 *Si octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur*

tur; erit octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. 246.a.

34 Altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, ut latus octaedri ad latus tetraedri. 246.b.

35 Diameter ſphæræ ad latus tetraedri eſt, ut latus octaedri ad latus cubi eiuſdem ſphæræ. 246.b.

36 Si recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ, latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit. 247.a.

37 Si latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ; poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti. 248.a.

38 Si recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit dodecaedri. 248.b.

39 Si linea quæuis recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius ſeſquialtera ſit latus octaedri, maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua octaedrum deſcribitur. 249.a.

40 Si latus tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ; latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti. 249.a.

41 Cubus ad octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt ut ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem. Item ut latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ. 249.b.

42 Si ſint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut ſit eadem antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 251.b.

43 Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius

ipſius lateris. 252.b.

44 Si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. 253.a.

45 Si cubus & tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit quadratum cubi ad triangulum tetraedri, ut latus tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli tetraedri ad latus oppoſitum deducitur. 253.a.

46 Latus tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis uero, ſiue altitudo tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti. 253.b.

47 Diameter ſphæræ potentia eſt dupla ſeſquiquarta axis tetraedri; atque adeo diameter longitudine eſt ſeſquialtera axis tetraedri. 254.a.

48 Axis, ſeu altitudo tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti eſt, ut latus tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 254.a.

49 Cubus triplus eſt tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 254.a.

50 Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. 254.b.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 Si in Tetraedro octaedrum inſcribatur, diuidetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 256.a.

2 Rectæ lineæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſe mutuo & bifariam, & ad angulos rectos ſecant. 256.b.

3 Idem eſt centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri. 258.b.

4 In dato octaedro pyramidem deſcribere. 258.b.

5 Si tetraedrum octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes tetraedri octo baſibus octaedri parallelæ, ſingulæ videlicet binis oppoſitis. 259.b.

6 Si in octaedro tetraedrum inſcribatur; recta, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialtera eſt axis tetraedri,

traedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſim oppoſitam deducta. 259.b.

7 In dato Dodecaedro Icoſaedrum deſcribere. 259.b.

8 In dato Dodecaedro cubum deſcribere. 260.b

9 Recta, quæ ſubtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri. 261.a.

10 In dato Dodecaedro octaedrum deſcribere. 261.a

11 In dato Dodecaedro Pyramidem deſcribere. 261.b.

12 In dato Icoſaedro cubum deſcribere. 262.a.

13 In dato Icoſaedro pyramidem deſcribere. 262.a.

14 In dato cubo Dodecaedrum deſcribere. 262.b.

15 Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum deſcribitur. 265.b.

16 Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt dodecaedri in cubo deſcripti: Maius uero ſegmentum latus cubi in hoc dodecaedro deſcripti. 265.b

17 Latus cubi æquale eſt duobus lateris, dodecaedri uidelicet in ipſo deſcripti, & dodecardri circa eundem cubum deſcripti. 266.a.

18 Recta duos angulos pentagonorum dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui dodecaedrum inſcribitur. 266.a.

19 In dato cubo Icoſaedrum deſcribere. 266.a.

20 Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis. 267.a

21 Bifariæ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus. 267.a.

22 Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti. 267.b.

23 Icoſaedri tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela. 267.b.

24 In dato Icoſaedro octaedrum deſcribere. 267.b.

25 Idem eſt centrũ Icoſaedri, & octaedri in eo deſcripti. 268.a

26 In dato octaedro Icoſaedrum deſcribere. 268.a.

27 Si duo latera triãguli æquilateri ſecentur extrema a media ratione, ita ut unius maius ſegmentum, alterius uero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Recta connectens dictas ſectiones duplum poteſt minoris ſegmenti. 270.a.

Si in

28 Si in octoedro Icoſaedrum deſcribatur, collocabuntur octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri, idemque erit centrum baſis octaedri, & Icoſaedri. 270.a.

29 Idem centrum eſt octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. 270.a.

30 In dato octaedro dodecaedrum deſcribere. 270.b

31 In data pyramide cubum deſcribere. 270.b.

32 Idem eſt centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 272.a.

33 Recta, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, triplaque eſt lateris cubi in pyramide deſcripti. 272.a.

34 Idem eſt centrum pyramidis, & octaedri in ea deſcripti. 272.b.

35 In data pyramide Icoſaedrum deſcribere. 273.a

36 In data pyramide Dodecaedrum deſcribere. 273.b.

37 In dato ſolido regulari ſphæram deſcribere. 273.b.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 Si in dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud dodecaedrũ; erit proportio Dodecaedri exterioris ad dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata. 275.a

2 Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 276.a.

3 Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita ut prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum unius lateris, & minus alterius; Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri. 276.a.

4 Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. 277.a

Minus

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti. 277.b. 5

Latus Icoſaedri in pyramide deſcripti eſt Apotome. 278.a. 6

Latus cubi potentia dimidiũ eſt lateris pyramidis in eo deſcriptæ: Latus uero pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 278.a. 7

Latus dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. 278.b. 8

Si in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & dodecaedrum; Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & dodecaedri. 278.b 9

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 279.a. 10

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt dodecaedri in pyramide deſcripti. 279.a. 11

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur; erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 279.b 12

Latus octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti. 279.b. 13

Octaedri latus eſt potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt dodecaedri octaedro inſcripti. 280.a. 14

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. 280.a. 15

Latus cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione. Latus uero dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentũ ad maius eiuſdẽ rectæ lineæ. 280.b. 16

Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ pyramidis. 281.a. 17

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri. 281.b. 18

Diameter

19 *Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis.* 282.a.

20 *Latus dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti.* 282.b.

21 *Diameter Icoſaedri poteſt & ſuipſius lateris ſeſquitertiũ, & lateris pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.* 282.b.

22 *Latus dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.* 283.a.

23 *Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minuſque eius ſegmentum a toto latere Icoſaedri ſublatum; A reliquá quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquet̃ latus dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.* 283.b.

24 *Cubus ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.* 285.a.

25 *Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.* 285.b.

26 *Cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.* 285.b.

27 *Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.* 286.a.

28 *Idem centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti.* 287.a.

29 *Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent.* 287.a.

30 *Octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.* 287.a.

31 *Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.* 287.b.

32 *Octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.* 288.a

33 *Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.* 289.b.

34 *Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi,*

cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. 290.a

Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit; Alterius uero & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. 292 a. 35

Dodecaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter dodecaedri ad rectam centra baſium dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. 292.b. 36

Dodecaedrum Pyramidis, in qua inſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo uero tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo uero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales. 293.b. 37

Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo uero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri extrema ac media ratione ſecta. 294.a 38

Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo uero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. 295.a. 39

Angulum inclinationis duarum baſium pyramidis, unius ad alteram, inuenire. 295.a. 40

Omnes inclinationes baſium pyramidis æquales inter ſe ſunt. 296.a. 41

42 *Angulum inclinationis duarum octaedri baſium, unius ad alteram, reperire.* 296.a.
43 *Oēs inclinationes baſiū octaedri æquales inter ſe ſunt.* 296.b.
44 *Angulum inclinationis duarum cubi baſium, unius ad alteram, inuenire.* 296.b.
45 *Omnes inclinationes baſiū cubi æquales inter ſe ſunt.* 297.a.
46 *Angulum inclinationis duarum baſium Icoſaedri, unius ad alteram, inuenire.* 298.a.
47 *Omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales ſunt.* 298.a.
48 *Angulum inclinationis duarum baſium dodecaedri, unius ad alteram, reperire.* 298.a.
49 *Omnes inclinationes baſium dodecaedri æquales ſunt inter ſe.* 299.b.

FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM eſt, cuius pars nulla eſt.

TOTVS hic primus liber in eo poſitus eſt, vt nobis tradat ortus, proprietateſq́; triangulorum tum iuxta angulos, tum iuxta latera, quæ quidem inter ſe comparat interdum, interdum vero vnumquodq; per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando vero ex angulis latera ſecundum æqualitatem, atq; inæqualitatem, rimatur. Idemq́; varijs rationibus inquirit in duobus quãdoq; triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq́; contemplationem aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, vt cum triangulis inter eaſdem parallelas conſtitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuiſionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiuſmodi. Itaq;, vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli ſententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorũ rem propoſitam exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac

facilius percipietur, ſi prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas ſecundum longitudinem, alteras ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem, altitudinemùe alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, ſed quædam vnicas tantum ſecundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, ſiue profunditatis continet. Quantitas .n. oĩs cõtinua aut longa ſolũ eſt, aut longa ſimul & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neq; aliam dimenſionem habere poteſt res vlla quanta, vt recte demonſtrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatem reſtituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimenſione, qui quidem, quod ſciam, hactenus nondũ eſt excuſus. Itaq; quod in quãtitate cõtinua, ſiue magnitudine exiſtit, intelligiturq́; ſine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum eſſe cogitetur, id appellatur ab Euclide, & a Geometris punctum. Huius exẽplũ in rebus materialibus reperiri nullum poteſt, niſi velis, extremitatem alicuius acus acutiſſimæ, ſimilitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremitas diuidi poteſt, & ſecari infinite, punctum vero indiuiduum prorſus debet exiſtimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero vnitas, quodq́; in tempore inſtans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

punctum .

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT *hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam neceſſario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, ſiue longitudinem abſq; latitudine, non abſurde concipere, intelligereq́; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati.*

obumbrati. Finis enim, ſeu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam eſt, ad longitudinem ipſiuſmet luminis, & vmbræ extenſa, carens omni latitudine, cum ſit limes vtriuſq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam deſcriptum ſuperiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum ſit prorſus indiuiduum, relinquetur ex iſto motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt ſi punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, veſtigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehenſum ſit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimenſione eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum eſt, vt alij dixerint, lineam nil eſſe aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Poteſt enim linea vnico tantum modo, vtpote ſecundum longitudinem, ſecari, atq; diuidi.



III.

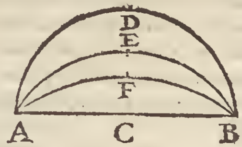
LINEAE autem termini, ſunt puncta.

DOCET, *quænam ſint extrema lineæ cuiuſuis, ſeu termini, dicens lineam terminari, ſiue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos aſſignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in ſuis extremitatibus puncta recipiat. Vt ſuperior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum eſt, ita vt earum extremitates ſola eſſe puncta cogitemus.*

IIII.

RECTA linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino eſt linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, ſiue compoſita ex vtraq;. Ex his deſcribit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit eſſe eam, quæ æqualiter inter ſua puncta extenditur, hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atq; illuc deflectendo ſubſultat; in qua denia, nihil flexuoſum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue ſumma vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent ſitum, neque vlla eſt alia ſublimior, aut humilior, ſed omnes æquabiliter inter extremos fines poſitæ progrediuntur. Proclus hanc definitionē exponens ait, tunc demū lineā aliquā ex æquo ſua interiacere puncta, quando æquale occupat ſpacium ei, quod inter ſua ſitum eſt puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tātum occupat præciſe ſpaciū, quanta eſt diſtantia puncti A, a puncto B: Lineæ vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant ſpacia, quam ſit diſtantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ eſt punctum C, æqualiter inter extrema A & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in aliis lineis, quoniam puncta D, E, F, ſubſultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre ſic definit. Linea recta eſt, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, ſi punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique eſſet C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A illuminaretur: Rurſus oculus in A, exiſtens extremo, non videret aliud extremū B, ob interiectum punctum C. quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perſpicuum eſt in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam eſſe minimam earum, quæ terminos habent eoſdem; qualis eſt A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non eſſet minima earum, quæ eoſdem terminos A, & B, poſſident, non ex æquo interiaceret ſua puncta, ſed ea potius linea, quæ minor di

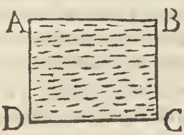


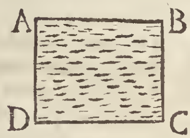
nor diceretur, quam A C B. Campanus deſcribens rectam lineam, vocat eam breuiſſimam ex vno puncto in aliud extenſionem. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici poſſunt, non definit hoc loco Euclides, ſed circularem exponet definitione decimaquinta, miſtam prorſus omittens, quod ea in hiſce elementis Geometricis nullum habeat vſum. Sunt autem plurima genera linearum miſtarum: quædam enim ſunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rurſus aliæ ſunt in plano, aliæ in ſolido. In plano ſunt Hyperbole, Parabole, Ellipſis, de quibus egit copioſiſſime Apollonius in conicis elementis, linea Conchoideos, de qua Nicomedes, linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis ſpiralibus tractationem inſtituit, & aliæ huiuſmodi. In ſolido, ſeu ſuperficie curua ſunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede deſcripta qualis eſt illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum exiſtit, vel etiam quæ circa ſphæram, cuiuſmodi ſunt ſpiræ illæ, quas ſol deſcribit ab ortu in occaſum, vt in ſphæra docuimus. Difformium autem infinitus eſt numerus, quas non eſt opus hic recenſere. Ex his conſtat, duas tantum eſſe lineas ſimplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; ſunt miſtas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingenioſe concludit Ariſtoteles in libris (lib. 1. tex. 5.) de cælo iuxta triplicem lineam, tres tantum eſſe motus, duos quidem ſimplices, rectum, & circularem, tertium vero miſtum, ſiue ex illis duobus compoſitum.

V.

SVPERFICIES eſt, quæ longitudinem, latitudinemq́; tantum habet.

POST lineam, quæ eſt prima quantitatis continuæ ſpecies, vnicamq́; habet dimenſionem, definit ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit, additq́; primæ dimenſioni ſecundum longitudinem, alteram ſecundum latitudinem. Nam in ſuperficie reperitur non ſolum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B,





B C, C D, D A, comprehenſa, conſiderataq; ſecundum longitudinem A B, vel D C, & ſecundũ latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur ſuperficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiuſq; corporis, ſi ab ea omnis ſoliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quaſi expreſſam ſuperficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non poſſint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri: Veſtigium enim relictum ex iſto motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoq;, propter motum, qui in tranſuerſum eſt factus; nulla vero ratione profundum eſſe poterit, cum linea ipſum deſcribens omni careat profunditate; quare ſuperficies dicetur. Vt ſi linea A B, fluat verſus D C, efficietur ſuperficies A B C D. Alij deſcribentes ſuperficiem dicunt, eam eſſe corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus conſtantem interuallis. Poteſt enim ſuperficies diuidi, & ſecari duobus modis, vno quidem ſecundum longitudinem, altero vero ſecundum latitudinem.

V I.

SVPERFICIEI autem extrema, ſunt lineæ.

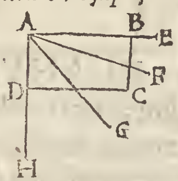
NON diſſimilis eſt hæc definitio ſuperiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates ſuperficiei eſſe lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt ſuperioris ſuperficiei A B C D, extrema ſunt lineæ A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera ſuperficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in ſuperficie infinita, vel etiam ſphærica, quæ corpus ſphæricum circundat. Poteſt etiam ſuperficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis eſt circularis ſuperficies, vt dicemus in definitione circuli.

PLA-

VII.

PLANA ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HAEC quoq; definitio ſimilitudinem quãdam deſcriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis ſurſum, deorſumùe ſubſultando, non recedant, appellabitur plana. qualis eſt ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocatæ, ita vt nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitum, nec vlla eſt alia ſublimior, humiliorùe, ſed omnes æquabiliter protenduntur. Alij ſuperficiem planam definiunt, dicentes eam eſſe, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel eſſe minimam, ſiue breuiſſimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt ſuperficies A B C D, tunc demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem ſit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadẽ, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in ſuperficie offendit depreſſum, aut ſublatum, ſed omnia



puncta ſuperficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod ſi minima ſuperficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipſa linea recta libere non poſſet circunduci, propter aliquem tumorem, ſeu eminentiam in ſuperficie occurrentem, iam non poſſet nuncupari plana. Itaq; vt ſit plana, requiritur vt omnibus modis poſſit recta linea commenſurari, hoc eſt, vt ei applicari poßit recta linea ſecundum A B, & A F, & deniq; ſecundum omnes partes. Hæc autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelligere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectæ in tranſuerſum, quæ ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur ſuper-

ficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones; Non enim diſficile erit huic ſuperficiei traditas deſcriptiones accommodare. Solent Mathematici ſuperficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda ſemper ſit ſuperficies plana. Cæteræ omnes ſuperficies, quibus non omni ex parte accommodari poteſt linea recta, qualis eſt ſuperficies interior alicuius fornicis, vel exterior

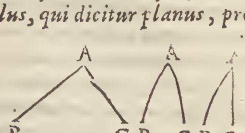


alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim ſuperficiei columnæ rotundæ, ſeu cylindri, ſecundum longitudinem adaptari poſſit linea recta, tamen ſecundum latitudinem minime poteſt: Idemq́; dicendum eſt de alijs. Superficies autem curua duplex eſt, conuexa videlicet, vt exterior ſuperficies ſphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, ſiue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro ſolum planam nobis explicauit, de qua eſt diſputaturus prioribus ſex libris.

VIII.

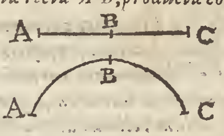
PLANVS vero angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam ſit angulus planus, dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie inuicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex huiuſmodi concurſu, ſeu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentem ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ lineæ



non

non in directum iacere, quando altera earum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel certe ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli ſe contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea poſt punctum contactus, quanquam non ſecet circulum, tamen ſtatim poſt illud ab eo ſe iungitur: Eodem pacto circularis illa linea ſecundum propriam diſpoſitionem, ac formam extenſa recedit a recta tangente, quamuis eam non ſecet. Vnde vere eſt angulus conſtitutus in illo contactu: qua de re plura ſcribemus in propoſitione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non eſſe angulum. Quod ſi duæ lineæ ſe mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concurſu, cum nulla ſit inclinatio, ſed ambæ vnam integram lineam conſtituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam, non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra ſecundum ſuam inflexionem, & obliquum ductum extenſa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere.

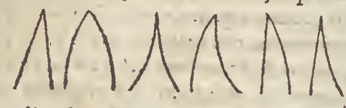


Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, neceſſe eſt, vt poſt concurſum productæ ſe mutuo ſecent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta exiſtit, angulum conſtituere vere poſſunt, etiamſi non ſe mutuo interſecent; ſufficit enim, quod ſe ſe contingant, ita vt ſtatim poſt contactum altera ab altera ſeparetur, quemadmodum & ante eundem ſemotæ cernuntur. Conſiſtit autem anguli cuiuſuis quantitas in ſola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent ſuam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius ſolidos comprehendit, de quibus Euclides diſſerit in Stereometria, quiq; in corporibus exiſtunt; Poſterius vero ſphærales, qui in ſuperficie ſphæræ conſtituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copioſe agitur in ſphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis reijcitur, cum hic de ſolis planis angulis ſit futurus ſermo.

I X.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo ſolum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta qui non inepte mixtus appellatur. Ex hiſce porro lineis poſſunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, ſeu habitudine linearum curuarum, vtpote ſecundum conuexum, & concauũ, ceu in propoſitis angulis plane, & aperte perſpicitur: Rectilineus vero variari non poteſt ratione inclinationis, habitudiniſue linearum, niſi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod eſt abſurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune eſt, non autem ita varietur, vt aliud conſtituat genus.

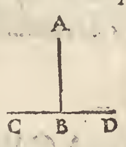


X.

CVM vero recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterq; æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpẽdicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

VSVS frequentiſſimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtuſi, & acuti, pro-

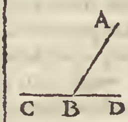
ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam linea perpendicularis: In ſequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtuſum, & acutum. Non enim alius dari poteſt angulus rectilineus, præter rectum, obtuſum, & acutum. Igitur ſi recta linea A B, rectæ C D, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis eſſe deinceps, quod eos eadē linea CD, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, ſed æquabiliter rectæ C D, inſiſtet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui inſiſtit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen ſi A B, extenderetur in rectum & continuum verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori: Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propoſitione 11. & 12. huius primi libri. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem eſſe rectum, aut lineam, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularem, requiritur, & ſufficit, vt probemus angulum, qui eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque eſſe. Quando enim anguli, qui ſunt deinceps, fuerint inter ſe æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipſos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quiſquam illorum rectus, vt conſtabit ex ſequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos conſtituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quid nam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quem nam vſum habeant apud Geometras deſcriptiones vocabulorum. Non enim magno labore, hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.



QVANDO recta AB, rectæ CD, inſiſtens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam cauſam neutrum rectum, ſed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtuſus, qualis eſt angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

XII.

ACVTVS vero, qui minor eſt recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alterā: Obtuſus vero, & Acutus augeri poſſunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea poßit recedere, vt perſpicuum eſt. Quoniā vero ad quemuis angulum planum conſtituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures exiſtunt anguli, ſolent Mathematici, vt tollatur confuſio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media oſtendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero ſignificant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia in ſuperiore figura angulum obtuſum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD; quod diligenter eſt notandum, vt facile dignoſcamus angulos, quorum mentio fit in demonſtrationibus.

TERMI-

X I II.

TERMINVS eſt, quod alicuius extremum eſt.

Tres ſunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus eſt, ſeu extremum lineæ: Linea ſuperficiei: & ſuperficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil poteſt, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimenſiones, quam tres. Omne ſiquidem terminatum ſuperat terminum ſuum vna dimenſione, vt perſpicuum eſt ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

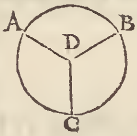
Non omnis quantitas terminos poßidens Figura dici poteſt, ne lineam finitam Figuram appellare cogamur: Sed eæ ſolum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe ſuperficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoque ſunt, vt ſolida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Superficies quoq; infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione poteſt. Figuræ vnico comprehenſæ termino ſunt. Circulus, Ellipſis, ſphæra, ſphæroides & aliæ huiuſmodi: Pluribus vero terminis incluſæ figuræ ſunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: ſolida autem circunſcripta, figuræ ſolidæ, ſiue corporeæ. Porro quia formas, ſeu typos variarum figurarum inſpicies quam plurimas in ſequentibus. planarum quidem in prioribus 10. libris, ſolidarum vero in poſterioribus quinq; propterea nulla hoc loco figura depingenda eſſe videtur.

XV.

CIRCVLVS, eſt figura plana ſub

vna linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

Definit hic circulum, figuram inter planas perfectiſſimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circunſcribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſint æquales, vocari circulum. Vt ſi ſuperficies, ſeu ſpacium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus ſuſcepto, vtpote a D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales ſunt D A, D B, D C, inter ſe ſint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propoſitione 1. tertii lib. Adiungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis eſt A B C, appellari Peripheriam, ſeu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Poteſt circulus etiã hac ratione deſcribi. Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur a linea recta finita circa alterum punctum extremũ quieſcens circunducta, cum in eundem rurſus locum reſtituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem deſcriptio perſimilis eſt ei, qua ab Euclide ſphæra deſcribitur lib. xi. Vt ſi intelligatur recta A D, circa punctum D, quieſcens moueri, donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cæpit, deſcribet ipſa recta totum ſpacium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoq; punctum quieſcens D, illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam ſunt inter ſe æquales, propterea quod recta A D, circunducta, omnes lineas, quæ ex D, poſſunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipſis, quamuis figura ſit plana vna linea circunſcripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipſam lineam terminantem omnes rectæ lineæ ſint æquales, circulus dici nequit.



HOC

XVI.

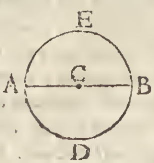
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

Docet, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, ſunt æquales, appellari centrum circuli; quale eſt præcedentis figuræ punctum D. Unde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes ſunt æquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæræ, non autem in ſuperficie circuli; quæ tamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam ſint æquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emiſſæ inter ſe ſint æquales.

XVII.

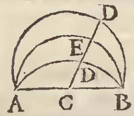
DIAMETER autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraq; parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum biſariam ſecat.

Si in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur o͞is in circulo recta linea ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodo, quæ per centrum vſq; ad peripheriam vtrinq; extenditur. Unde plures aſſignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum



biſariam

biſariam ſecari a diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod



tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis ſit vtriq; portioni: Si igitur circunferentia A D B, congruat penitus circunferentiæ A E B, manifeſtum eſt, duas illas portiones a diametro factas, eſſe inter ſe æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia A D B non omni ex parte cadere dicatur ſuper circunferentiam A E B, ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C, ſecans circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, ſed ambæ inter ſe aptabuntur, ideoq; æquales erunt, quod demonſtrandum proponebatur.

XVIII.

SEMICIRCVLVS vero eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

Exempli gratia, in ſuperiori circulo figura A D B, contenta ſub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur ſemicirculus, quia, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, ſemicirculus. Idem autem punctum C, diametrum ſecans bifariam, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.

Habent nonnulla exemplaria hoc in loco definitionem egmenti circuli: Verum, quia ea repetitur in 3. lib. vbi prius

prius eſt locus, & Proclus illā non inuenit in antiquis exemplaribus, maluimus hic illam ſubticere, eiuſq; explicationem in 3. librum, ante quem nulla fit mentio ſegmentorum circuli, differre.

XIX.

RECTILINEAE figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides deſcriptiones variarum figurarum, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potiſſimum ſermo futurus eſt in hiſce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perſpicuum eſt, figuras planas curuis lineis comprehenſas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circunſcribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide deſcribentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ ſub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circunſcribuntur, aperte nobis innuit, quo nam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot ſint anguli, quot latera, ſeu rectæ lineæ, ex quibus conſtant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes ſpecies iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ ſub quatuor.

Eadem ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ ſpecies mox ſubſequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

Qvoniam ſpecies rectilinearum figurarum ſunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam ſpeciẽ, ſub qua omnia triangula continentur; quatuor conſtituunt ſecundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt ſpeciem; ſex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunſcribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, forte eam ob cauſam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis ſermo habeatur, & quod facile ad ſimilitudinem harum duarum ſpecierum cæteræ omnes a quolibet definiri poſſint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & ſex lineis comprehenſam ſexilateram, atq; reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiuſmodi figuræ quinquangulæ, ſexangulæ, ſeptangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterũ eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

Descendit iam ad ſingulas ſpecies triangulorum. Quia vero triangula diuidi poſſunt vel habita ratione laterum,

rum, vel angulorum, declarat prius ſpecies prioris diuiſionis, quæ tres ſunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis ſe ſe poſſint habere. Aut enim omnia æqualia ſunt; aut duo tantum, tertio exiſtente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; eſſe, ceu ad quintã propoſitionem huius libri demonſtrabimus.



XXIIII.

ISOSCELES autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

Ex hac rurſum æqualitate duorum laterum trianguli Iſoſcelis efficitur, duos angulos ſuper reliquum latus etiam eſſe æquales, vt demonſtrabit Euclides propos. 5. huius libri. Appoſuimus autem duo triangula Iſoſcelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, poſterius autem idem minus obtinet.



XXV.

SCALENVM vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

Hic deniq; ex inæqualitate omnium laterũ trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt oſtendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his conſtat, eodem modo potuiſſe diuidi triangulum in tres ſpecies, ſi æqualitatis angulorũ ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli ſint inter ſe æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel mi-



vel minore exiſtente; aut omnes tres inæquales; erit omne triã gulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, ſecundum vero Iſoſceli, tertium deniq; Scaleno reſpondet triã gulo. Cæterum quanam arte conſtruenda ſint triangula huius partitionis ſuper quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diuiſionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſupra diximus,) ſit vt tres quoq; ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti; aut deniq; nullus rectus, nullusq; obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs

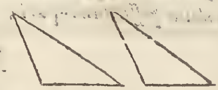


Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figuræ indicant; Æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq; , cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod

obtuſum angulum habet.



TRIANGVLVM *amblygonium, ſiue obtuſangulum eſſe quoq; poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum; alias eadem ratione eſſent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. oſtendemus, æquales, ideoq; cum vnus ponatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.*

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE *triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quam Scalenum, eſſe vel rectangulum, vel amblygonium, vel Oxygonium; Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri tres vero tam Iſoſcelis, quam Scaleni: atq; in vniuerſum ſeptem triangulorum genera, æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium eſſe diximus, Iſoſceles rectangulum, Iſoceles amblygonium Iſoſceles oxygonium, ſcalenum rectangulum, ſcalenum amblygonium, & ſcalenum oxygonium. Quæ etiam hiſce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Iſoſceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Iſoſceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Iſoſceles, & Oxygonium Scalenum. Quare perſpicuum eſt, quamnam connexionem, ſiue affinitatem habeant inter ſe triangula vtriuſq; partitionis. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expreſſe nominantur, ſolet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Baſis, ſiue illud in ſitu infimum occupet locum, ſiue ſupremum &c. Hoc te breuiter*

monere volui, ne putares aliq́d latere myſterij in baſe triãgu li, intelligereſq́; quodlibet latus, omni diſcrimine remoto, baſis nomine poſſe nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autẽ figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

POST figurarum trilaterarum ſpecies, exponit iam ſingulatim quadrilateras figuras, recenſendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia ſunt, poſterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter ſe æqualia exiſtunt, omneſq́; anguli recti. Itaq; qua lrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propoſ. 46. huius lib. quonam modo conſtruendum ſit quadratum ſuper recta linea propoſita finita.



XXX.

ALTERA vero parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.

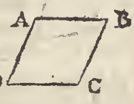


SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli ſunt recti, at latera non ſunt inter ſe æqualia, quamuis bina oppoſita inter ſe æqualia exiſtant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter ſe, & A D, B C, inter ſe quoq; æqualia ſunt, cũ A B C D, propter angulorũ rectitudinẽ, parallelogrammũ ſit, vt in hoc lib. ad propoſ. 34. oſtendemus.

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.

Haec figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppoſitas prorſus habet conditiones, & diuerſas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppoſiti inter ſe æquales exiſtant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter ſe, & B, & D, quoq; inter ſe æquales ſunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterũ, parallelogrammũ ſit, ceu ad eandem propoſ. 34. huius libri demonſtrabitur.



XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduerſa & latera, & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neq; rectangula.

Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppoſita. Nam neq; eius latera omnia æqualia ſunt, neq; vllus angulus rectus, ſed tamen latera bina oppoſita, qualia ſunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter ſe, item anguli bini oppoſiti, quales ſunt A, C, & B, D, inter ſe exiſtunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici poſſunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; ſunt, irregulares.



XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

Reliqvas Omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, ſeu rectos, neq; latera bina oppoſita, neq; angulos binos oppoſitos habeant inter ſe ſe æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidē, cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Poſſunt enim duo anguli eſſe recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, ſed vel vnus obtuſus, & alij acuti, vel duo obtuſi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri poteſt quaſi diuiſio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter ſe ſunt, vel nullum alteri eſt æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum ſpecies nonnullas afferemus poſt definitionem linearum parallelarum, ſeu æquidiſtantium, & parallelogrammi.



XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraq; parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

Vt duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, ſiue æquidiſtantes, non ſatis eſt, vt in quamcunq; partem, etiam ſpatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; ſed neceſſe quoq; eſt, vt in vna plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in tranſuerſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire poßunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, alteri quoq; accommodari poteſt ſecundum omnia eius puncta, quamuis re ipſa in duabus ſuperficiebus diuerſis reperiantur; Vt propoſitis duabus rectis lineis A B, C D, ſi ſuperficies aliqua plana rectæ A B, applicetur,

cetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circunducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiuſmodi rectæ



duæ lineæ in eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eædem non coeant, etiamſi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, ſiue æquidiſtantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eodem dicantur ſuperficie exiſtere. Satis ſit hoc loco breuiter admonuiſſe, recte ab Euclide vtramq; conditionem eſſe poſitam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & producta in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quodſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandē ex vna parte longius protractas in vnū punctū cōuenturas, quamuis ex altera ſemp magis ac magis inter ſe diſtent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunq; ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam eſſe parallelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in vna, eademq; ſuperficie iacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret prius oportet, eas in eodem exiſtere plano, & in neutram partem productas coniungi poſſe. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conātur oſtendere, aliquas rectas lineas eſſe parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamſi infinite producantur, nulla facta prorſus mentione alterius conditionis, quæ eaſdem lineas in eodem requirit exiſtere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem in libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum quæ complementa parallelogrammi dicuntur, neceſſarium eſſe duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid ſit Parallelogrammum, & quæ ſint parallelogrammi complementa, vt facilius demonſtrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallela, ſeu æquidiſtantia.



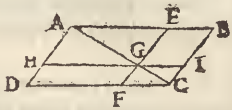
VT figura quadrilatera A B C D, ſiquidem latus A B, æquidiſtet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor ſolum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, poſteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus exiſtat rectus. Cæterum, quatuor has figuras eſſe parallelogramma, oſtendemus ad propoſ. 34. huius lib. Itaq; poſſumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rurſus in rectangulum, & æquilaterum, quale eſt Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale eſt Rhomboides; in rectangulum, ſed non æquilaterum, qualis eſt figura altera parte longior; & in æquilaterum, ſed non rectangulum, cuiuſmodi eſt Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera oppoſita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla oppoſita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ nō ſunt parallela, inter ſe æqualia, diciturq; Trapezium Iſoſceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus ſeptem genera figurarum quadrilaterarum conſtitui poſſunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Iſoſceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera ſunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus

parallela

parallelæ ſecantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



Sit parallelogrammũ A B C D, in quo diameter A C; & linea E F, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus A D, B C; Item linea H I, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidẽ duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non tranſit; vocantur a Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctuin, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM hoc poſtulatum planum admodũm eſt, ſi recte conſiderẽtur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius; atq; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere prograediens, ſit vt ſi

punctum

punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta ſane ſit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione expoſtulat Euclides, quemadmodum hic vides a puncto A, ductam eſſe rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & ſic innumeræ aliæ ab eodem puncto educi poſſunt ad alia atq; alia puncta.



II.

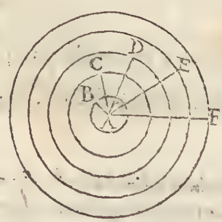
ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD ſi punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis ſit expers, producta erit ipſa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere poſſimus moueri ad infinitam diſtantiam. Sic linea recta A B, producta eſt primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.



III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.



IAM vero, ſi terminatam rectam lineam cuiuſcunq; quantitatis mente conceperimus applicatam eſſe ſecundum alterum extremũ ad quoduis punctum, ipſamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cœpit; deſcriptus erit circulus; effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ ſingulæ circa centrum A, circum-

circumuolutæ ſingulos circulos deſcripſerunt iuxta quantitatem, ſeu interuallum ipſarum.

P R Æ T E R *hæc tria poſtulata quibus Euclides cõtentus fuit, ſunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progreſſu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex ſe vel facile intelliget.*

IIII.

ITEM quæcunq; magnitudine data, ſumi poſſe aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

O M N I S *enim quantitas continua per additionem augeri, per diuiſionem vero diminui poteſt infinite; Vnde nunquã dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari poſſit: neque tam parua, quin minor ea poſſit exhiberi. Hoc idem in numeris verum eſt, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri poteſt infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.*

COMMVNES NOTIONES, ſiue Axiomata, quæ & Pronunciata dici ſolent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

F I E R I *nulla ratione poteſt, vt duæ quantitates inæquales æquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem neceſſario maior illarum; Et ſi maior æqualis fuerit propoſitæ quantitati, ſu-*

ti, ſuperabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoq; eſſe.

II.

ET ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, ſiue compoſitæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus eſſet adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoq; æquales.

III.

ET ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

NAM ſi reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuiſſet detractum, quam a maiore.

IIII.

ET ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia.

QVIN & ſi æqualibus inæqualia adiecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem conſtituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adijciantur, compoſita quantitas ex maiore, maior eſt, quam compoſita ex minore.

V.

ET ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia.

SIC

Sic etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum reſiduum maioris maius eſt reſiduo minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales; vel quid relinquatur poſt ſubtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde poteſt. Poſſunt enim compoſitæ quantitates, vel reſiduæ, eſſe & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ ſunt inæqualia. Sic etiam ſi ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ ſunt inæqualia. At vero, ſi ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia ſunt. Item ſi detrahantur 3. & 1, ex 7. & 5. remanebunt 4, & 4. quæ æqualia quoq; exiſtunt.

Porro in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum, intelligenda eſt etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt: Et ſi inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

VI.

ET quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

Similiter, quæ eiuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum eſſet duplex, vel triplex &c. alicuius quantitatis, deficeret vtiq; minus a duplici, vel triplici, &c. Quod ſi cōtra, minus eſſet duplex, vel triplex &c. quantitatis cuiuſpiam, excederet ſane maius duplex ipſum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex ſecundo axiomate comprobari

bari poteſt, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtriq; tertia illa addatur, erunt compoſitæ duplices illius tertiæ; ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quod ſi rurſum compoſitis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiuſdem tertiæ; Cum igitur & æquales inter ſe, propter idem additamentum, exiſtant; eademq; ſit ratio in cæteris multiplicibus, perſpicuum erit Axioma propoſitum.

2. pron.

2. pron.

VII.

ET quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.

PARI ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt.

VIII.

ET quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

HOC eſt, duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

ECON-

Econtrario, *Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuo congruent. ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuo congruentes, eſſe æquales ſecundum id duntaxat, in quo ſibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum &c.*

IX.

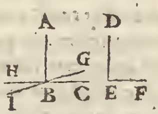
ET totum ſua parte maius eſt.

Cvm *pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte maius.*

X.

ITEM, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

Hoc *axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex* 10. *definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuiùe nequeat, ſed prorſus ſit immutabilis: Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet: Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cum ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis lineæ ſint inæquales interdũ. Conatur tamẽ Proclus ex* 10. *definitione id demõſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitq; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectã D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis eſt B G, propterea quod angulus D E F, minor ponatur angulo A B C. Producatur C B, in rectum & continuum vſque ad H;* 2. *petit.*



C

ad H; Cū igitur angulus A B C ſit rectus, erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoq; , quare maior etiam an-
10. def. *gulo A B G. Producta autem G B, in rectum & continuū vſq;*
1. petit. *ad I, cum angulus A B G, ponatur rectus, fiet angulus ABI,*
10. def. *illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo A B I, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademq; eſt ratio in cæteris.*

RECTE *autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud nō poſſe conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis, rectus eſt, cum & curuilineus recto æqualis eſſe queat, vt in 5. lib. dicemus, qui tamen non dicitur rectus, cum non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine vlla exceptione.*

X I.

ET ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.



VT ſi in duas lineas rectas A B, C D, incidens alia recta E F, faciat duos angulos internos, & ex eadē parte B E F, D F E, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandē conuenturas eſſe ad aliquod punctū vnū, verſus eam partem, in qua duo anguli minores exiſtūt duobus rectis, vt appoſitum exemplum commonſtrat. Ratio huius perſpicua eſt, quoniā quādo duo anguli interni, & ex eadē parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partē coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protenduntur, vt propoſ. 28 huius lib. demōſtrabitur: Quare ſi duo anguli interni, & ex eadē parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt ex ea parte di-

te dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquãdo in vnũ punctum. Verum quia hoc axioma a numero principiorũ omnino reijcitur ſecundũ Geminũ Geometrã, Proclum, & alios, dicitq; debet potius Theorema, quam principiũ, cũ nõ facile quiuis ei aſſenſum præbeat, propterea quod reperiantur & aliæ lineæ, quarũ ſpatiũ licet ſemper magis ac magis coanguſtetur, nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinite producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij: Idcirco illud poſt 28. propoſ. & ante 29. huius libri, vbi primum eius vſus incipit apparere, Geometrice demonſtrabimus ex ſententia Procli, vt ſine vlla dubitatione ad theorematum, atq; problematum demonſtrationes poſſit aſſumi.

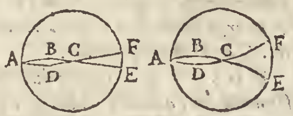
XII.

DVAE rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

NVLLAM prorſus habet difficultatem hoc principium; Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coëant ad efficiendum angulũ, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis diſiungẽtur ſi producãtur, vt in exemplo propoſito perſpicuũ eſt.



Quare vt ſuperficies, ſpatiumve quodpiam rectilineũ ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarũ rectilinearũ prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri põt vt duæ lineæ rectæ claudãt ſuperficiẽ, cõprehendãt duæ rectæ A B C, A D C, ſuperficiem ABC D, ita vt duæ illæ rectæ coëant in duobus punctis A, & C.



Facto deinde centro C,
deſcribatur circulus interuallo C A, & producantur rectæ 3. pet.
A B C, A D C, in rectũ, & cõtinuũ vſq; ad circunferẽtiã, nempe 2. pet.
ad pũcta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, trãſeunt
per centrũ C, erũt ſemicirculi A E, A E F, inter ſe æquales, & 17. def.
idcirco circunferentia quoq; A E, circunferẽtiæ A EF, æqualis

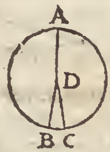
lis erit, pars toti, quod fieri non poteſt. Non ergo rectæ duæ lineæ ſpacium comprehendunt. Quod eſt propoſitum.

Hvic duodenario numero Axiomatum ab Euclide poſitorum adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus neceſſaria ad futuras demonſtrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XIII.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.

Non eſt difficile iſtud Axioma, ſi perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo ſemper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo ſe mutuo interſecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonſtrat.



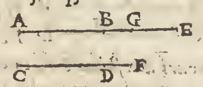
Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & interuallo D A, deſcribatur circulus 3. pet. *ſecans duas rectas propoſitas in punctis B, & C; Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C,* 17. def. *inter ſe æquales, (Sunt enim circunferentiæ ſemicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur eſſe diametri) pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem ſegmentum commune. Quod eſt propoſitum.*

Possvnt tamen duæ lineæ rectæ commune habere ſegmentum, quando vnam & eandem rectam lineam conſtituunt. Vt in ſubſequenti figura, rectæ A G, E B, commune habent ſegmentum B G; quia ambæ vnam rectam conſtituunt lineam A E. At vero quando duæ rectæ ſunt diuerſæ, quales fuere A B, A C, in ſuperiori exemplo, nō poſſunt poſſidere ſegmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonſtratum.

XIIII.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis.

Hoc, & ſequens pronunciatum deſumpſit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaq; quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, ſitq; B E, maior quam D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipſi D F, vt ſit G E, exceſſus, quo quantitas addita B E, ſuperat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita ſunt æqualia B G, D F, erunt tota A G, C F, æqualia. Quare conſtat, totam quantitatem A E, ſuperare totam C F, eodem exceſſu G E, quo magnitudo D F, adiuncta a magnitudine adiũcta B E, ſuperatur. Quod eſt propoſitũ. 2. pron.



XV.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

In eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipſi D F. vt G E, ſit exceſſus, quo quantitas B E, quantitatem D F, ſuperat. Quoniam igitur æqualibus B G, D F, addita ſunt æqualia A B, C D, erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, ſuperabit totam C F, eodem exceſſu G E, quo maior quantitas propoſita B E, minorem D F, ſuperat. Quod eſt propoſitum. 2. pron.

XVI.

SI ab æqualibus inæqualia demantur,

erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.

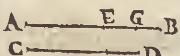
A B æqualibus A B, C D, auferantur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, exceſſus, quo quantitas B E, ſuperat quantitatem D F. ita vt B G, æqualis ſit ipſi D F. Quia igitur ab æqualibus

3. pron. *A B, C D, ablata ſunt æqualia B G, D F, remanebunt A G, C F, æqualia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduum A E, ſuperari a reſiduo C F, eodem exceſſu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatā magnitudinē D F, ſuperat. Quod eſt propoſitū.*



XVII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui totorum æqualis.



A B inæqualibus A B, C D, auferantur æqualia A E, C F. Sitq; B G, exceſſus, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D, ita vt A G, æqualis ſit ipſi C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D,

3. pron. *ablata ſunt æqualia A E, C F, remanebunt E G, F D, æqualia. Quare reſiduum E B, ſuperabit reſiduum F D, eodem exceſſu B G, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D. Quod eſt propoſitum.*

IN his quoq; quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt vna etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorū exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune dematur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas. 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus

exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorũ exceßus 2, idem eſt, qui ipſorũ 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Deniq; ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XVIII.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM omnes partes ſimul ſumptæ conſtituũt totũ, cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.

XIX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT. quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. ꝑpterea reliquus illius 14. duplus etiã eſt reliqui huius 7. In vniuerſum aũt hoc demõſtrabitur propoſ. 5. lib. 5. nimirũ. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atq; ablata ablatæ, vt decupla, vel cẽtupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI poteſt ex dictis cũ Proclo, & Gemino hoc diſcrimẽ inter poſtulata, & Axiomata, quod cũ vtraq; ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturã ſapiũt Problematũ, propterea quod aliquid fieri expoſcant; hæc vero, Theoremata imitãtur, cũ nihil fieri petãt, ſed ſolũ ſententiã aliquã notiſſimã proponãt. Differt aũt Poſtulatũ a ꝓblemate, qđ cõſtructio poſtulati non indigeat vlla demõſtratione, problematis aũt conſtructionẽ cõcedat nemo ſine demonſtratione, eo qđ difficile aliquid nobis exhibeat cõſtruendũ. Idẽ diſcrimẽ inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud.n. demonſtrari nõ debet, hoc vero concedendũ nulla eſt ratione, niſi demõſtretur. Nam nemo huius propoſitionis demonſtrationẽ, vel etiã probationẽ requiret.

Quæ eidem æqualia, inter ſe quoq; æqualia ſunt. Huius autem ſtatim demonſtrationem deſiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales ſunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de poſtulatis, problematiſq;.

CONSTAT *quoq; Poſtulatorum alia propria eſſe Geometriæ, qualia ſunt illa tria, quæ Euclides nobis propoſuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiuſmodi eſt hoc, Quantitatem poſſe infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri poteſt, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, ſiue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, & tertiumdecimũ, ſoli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonſtrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquũt magnitudines æquales, ſiue hæ magnitudines lineæ ſint, ſiue ſuperficies, ſiue corpora; Ita quoq; numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.*

HAEC *dicta a nobis ſint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonſtrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiuſq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiuſmodi, vt plane non intelligantur, niſi prius eorum vſus appareat in demonſtrationibus; id quod ſatis te experientia docebit.*

ANTEQVAM *porro ad propoſitiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum eſt, quemnam ordinem, ac modum in ipſis demonſtrationibus ſimus ſecuti. Primum cuilibet propoſitioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus ſignificat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum eſt ſecutus in Euclidis propoſitionibus, alter vero in ipſa propoſitionum ſerie deſcriptus refert diſpoſitionem propoſitionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obſeruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo conſilio a nobis eſt factum: quoniam cum a quibuſdam Geometris propoſitiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis ſeriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter ſe diſcrepent, quoad ordinem propoſitionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. libris perſpicitur; neceſſarium eſſe duximus, vt*

vtriuſq;

ꝟtriuſq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, ꝟt ſi aliquando numerus propoſitionum a Geometra quopiam citatus non reſpondet alteri interpreti, alteri ſaltem conueniat. Deinde ne curſus demonſtrationum interrumperetur, citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, quæ quidem citationes intelligendæ ſunt modo infraſcripto.

1. def.	Prima definitio. & ſic de alijs numeris, ꝟt 4. def. 23. def. &c.
1. pet.	Prima petitio.
1. pron.	Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, ꝟt prius.
1. primi.	Prima propoſitio primi libri.
23. Vndec.	Vigeſimatertia propoſitio ꝟndecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertijdecimi libri.
9. ſextid.	Nona ſextidecimi libri. &c.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quartidecimi.

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PRO-

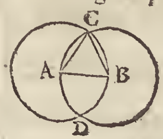
PROBLEMA I.

1. ## PROPOSITIO. I.

SVPER data recta linea terminata triangulum AEquilaterum conſtituere.

IN omni problemate duo potiſſimum ſunt conſideranda, conſtructio illius, quod proponitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem recte eſſe inſtitutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet conſtituere triangulum æquilaterum, ſuper data recta linea terminata quacunq; , ita vt linea recta propoſita ſit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta linea, quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet conſtruere ex principijs conceſſis triangulum aliquod, deinde demonſtrare, ipſum ea ratione conſtructum, eſſe æquilaterum, hoc eſt, habere omnia tria latera inter ſe æqualia. Quod idem in alijs problematis perſpici poteſt. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonſtretur id, quod proponitur, conſtruendum eſt, ac efficiendum prius aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pauca verò admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant demonſtrationem.

SIT igitur propoſita recta linea terminata A B, ſuper quam conſtituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, deſcribatur circulus C B D: Itē centro B, & interuallo eiuſdē rectæ B A, alius circulus deſcribatur C A D, ſecans priorem in punctis C, & D. Ex quorum



3. pet.

1. pet.
20. def.

vtrouis, nempe ex C, ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; Eritq; ſuper rectam A B, cōſtitutū triāgulum A B C, hoc eſt, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita conſtructum neceſſario eſſe

rio eſſe æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rurſus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis eſt rectæ A B. Quare & A C, B C, inter ſe æquales erunt, atq; idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

15. def.

1. pron.

SCHOLION.

VT autē videas, plures demōſtrationes in vna propoſitione contineri, placuit primā hanc propoſitionē reſoluere in prima ſua principia, initio facto ab vltimo ſyllogiſmo demōſtratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulū A B C, conſtructū methodo prædicta, eſſe æquilaterum, vtetur hoc ſyllogiſmo demonſtrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, eſt æquilaterum. 23. def.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, eſt æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio ſyllogiſmo.

Quæ eidem æqualia ſunt, inter ſe quoq; ſunt æqualia. 1. pron.

Duo latera A C, B C, æqualia ſunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter ſe æqualia ſunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia exiſtunt.

Minorem verò huius ſyllogiſmi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, inter ſe ſunt æquales. 15. def.

Lineæ A B, A C, ſunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter ſe.

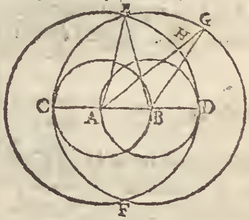
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis ſyllogiſmi tota confirmata erit.

Non aliter reſolui poterunt omnes aliæ propoſitiones non ſolum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt

Negligunt tamen Mathematici reſolutionem iſtam in ſuis demonſtrationibus, eo quod breuius ac facilius ſine ea demonſtrent id, quod proponitur, vt perſpicuum eſſe poteſt ex ſuperiori demonſtratione.

SIQVIS *autem ſuper data recta deſideret conſtituere triangulum quoq; Iſoſceles, & ſcalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, deſcribantur duo circuli, vti prius. Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circunferentias vſq; ad puncta C, & D. Atq; centro A, interuallo vero A D, deſcribatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, ſecans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq́; erit ſuper recta A B, triangulum A B E; quod dico eſſe Iſoſceles, nimirum duo latera A E, B E, eſſe & æqualia inter ſe, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circunferentiam E D F, erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circunferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C æquales inter ſe, (vtraq; enim A C, & B D, æqualis eſt rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circunferentiam quoq; egrediantur: Quare A C, B D, æquales inter ſe erunt. Addito igitur cõi recta A B, erit tota A D, toti B C, æqualis.) Igitur A E B E æquales quoq; inter ſe erũt. Quod vero vtraq; A E B E, maior ſit quã A B, perſpicuũ eſt, cũ A D, æqualis oſtẽſa ipſi A E, maior ſit, quã A B; Itẽ B C, æqualis demõſtrata ipſi B E, maior quoq; ſit, quã A B. Conſtitutũ igitur eſt ſuper recta A B, Iſoſceles A B E, habens duo latera A E, B E æqualia inter ſe, & maiora latere A B qđ faciendum erat. Atq; hæc eſt demonſtratio Procli, aliorumq́; interpretum Euclidis.*



2. pet.
3. pet.
1. pet.
20. def.
15. def.
15. def.
1. pron.
2. pron.
1. pron.
9. pron.
9. pron.

BREVIVS *tamẽ videtur mihi poſſe demonſtrari, triangulũ A B E, eſſe Iſoſceles, hac ratione. Quoniã A E, æqualis eſt*

15. def.

recta

rectæ A D, & recta A D, eſt dupla rectæ A B propterea quod B A, B D æquales inter ſe ſunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rurſus quia B E, æqualis eſt rectæ B C, & B C, dupla eſt ipſius A B, propterea quod A B, A C æquales ſunt inter ſe, erit & B E, dupla ipſi A B. Cum igitur vtraq; A E, B E, dupla ſit eiuſdē A B, erunt A E, B E, inter ſe æquales, maioreſq́; propterea recta A B. Iſoſceles ergo eſt triangulum A B E.

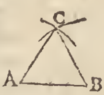
15. def.
15. def.
6. pron.

IAM vero, ſi ex pūcto A, ducatur linea recta A G, ad circunferentiā E G F, quæ nō ſit eadē quæ A E, vel A D, ſecans circunferentiā E H D, in pūcto H, & ex G, ad B, ducatur alia recta G B; conſtitutū erit triangulū A B G ſuper recta A B, quod dico eſſe ſcalenū. Quoniam A G, maior eſt quam A H: Sunt autem A H A E, ex centro A, ductæ, inter ſe æquales; erit & A G, maior quam A E, hoc eſt, quam B E, quæ oſtenſa eſt æqualis ipſi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, cū B G, ſit æqualis ipſi B E. Eſt autem & B G, maior quam A B, propterea quod tota B C, æqualis ipſi B G maior ſit quā A B, pars. Omnia ergo tria latera triāguli A B G, inæqualia ſunt, ideoq́; ſcalenum eſt ex definitione; quod erat faciendum.

1. pet.
1. pet.
20. def.
9. pron.
15. def.
15. def.
9. pron.

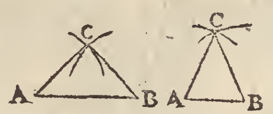
PRAXIS.

CONABIMVR in ſingulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quādā facilē, & breuē, qua effici poſſit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis cōtendit conſtruere; Idq́; in ijs præſertim obſeruabimus, quæ frequentiorē vſum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod ſecum videtur afferre.



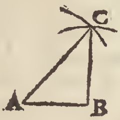
ITAQVE triangulū æquilaterū ita facile conſtruetur ſup data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ A B, deſcribantur duo arcus circulorū ſe interſecantes in puncto C, ſiue hoc infra lineā cōtingat ſiue ſupra. Poſt hæc ducātur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factūq́; erit, quod proponitur. Cuius rei eadē eſt demonſtratio cū ſuperiori ſi modo circuli eßent integri, ac perfecti. Tranſirent enim neceſſario per puncta A, & B.

ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus; vel minore, ſi eandem in latus maius eligamus,



mus, [3] *deſcribantur duo arcus ſecantes ſe in C. Poſtea ducantur rectæ A C, & B C; conſtructumq; erit Iſoſceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum aſſumptum, maius ſcilicet, aut minus, quam recta A B.*

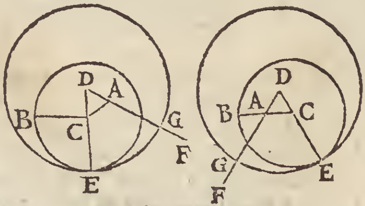
*S*CALENVM *deniq; hoc modo fabricabitur ſuper data recta A B. Ex centro B. interuallo vero maiore, quam B A, deſcribatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius aſſumptum, deſcribatur alter arcus priorem ſecans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; conſtitutumq; erit Scalenum, vt conſtat ex inæqualitate interuallorum, quæ aſſumpta fuerunt in conſtructione.*



*C*AETERVM *quo pacto triangulum conſtitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuſcunq;, ſingula ſingulis, latius explicabimus propoſ. 22. huius libri.*

2. ## PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctū datum A, & data recta linea B C; cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, deſcribatur circulus B E, interuallo rectæ B C.
3. pet. Et ex A, ad centrum C, recta ducatur A C; (niſi punctum
1. pet. A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta ſumetur A C, vt ſecūda figura indicat.) Super recta vero A C;
1. primi. cōſtruatur triangulum æquilaterum A C D, ſurſum, aut deorſum

deorſum verſus, vt libuerit; cuius duo latera modo conſtituta D A, D C, verſus rectam A C, extendantur; D C, quidem oppoſita puncto dato A, vſque ad circunferentiã in E; D A, vero oppoſita centro C, quantumlibet in F. Deinde e centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrũ trãſeuntis, alter circulus deſcribatur E G, ſecãs rectã D F, in G. Dico rectam A G, quæ poſita eſt ad punctũ datũ A, æqualẽ eſſe datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ ſunt ex centro D, ad circunferentiã E G, ipſæ inter ſe æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidẽ C E, æqualis eſt recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadãt e centro C, ad circunferentiã B E.) Igitur rectæ A G, & B C, quãdoquidẽ vtraq; æqualis eſt oſtẽſa rectæ C E, inter ſe æquales erunt. Ad datum igitur punctũ, &c. quod erat faciendũ.

2. *pet.* 3. *pet.* 15. *def.* 3. *pron.* 15. *def.* 1. *pron.*

QVOD, ſi punctũ datũ fuerit in extremo datæ lineæ, quale eſt C, facile abſoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, deſcribatur circulus, ad cuius circunferentiã recta ducatur vtcumq; C E, erit hæc poſita ad punctũ datũ C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraq; & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E.

3. *pet.* 1. *pet.* 15. *def.*

SCHOLION.

HVIVS problematis varij eſſe poſſunt caſus, vt ait Proclus. Aut .n. datũ punctũ in ipſa data recta eſt poſitũ, aut extra ipſã: Si in ipſa, erit vel alterũ extremorũ eius, vel inter vtrũq; iacebit extremũ. Si vero extra ipſam, erit vel e directo datæ lineæ, ita vt pducta in rectũ & cõtinuũ p ipſum pũctũ trãſeat; vel nõ e directo, ita vt ab ipſo ad datæ lineæ extremorũ quoduis recta linea ducta cũ data recta angulũ efficiat; Quo modo vel ſupra datã lineã erit cõſtitutũ, vel infra, vt manifeſtũ eſt. In omnibus aũt iſtis caſibus ſemper eadẽ eſt cõſtructio, & demõſtratio. Quod ſi in conſtructione fiat triãgulũ A C D, ſup recta A C, Iſoſceles, eodem modo oſtendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem eſſe.

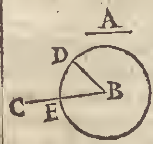
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqua-

libus,

libus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

Sɪɴᴛ duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineã æqualem minori A. Ad alterutrum extremorũ lineæ maioris B C, nempe ad punctũ



2. primi. B, ponatur aliqua linea, quæ ſit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo

3. pet. autem B D, circulus deſcribatur ſecans B C, in E. Dico B E, detractam eſſe æqualẽ ipſi A. Quoniã B E,

15. def. æqualis eſt rectæ B D, & eidẽ B D, æqualis eſt recta A, per

1. pron. conſtructionem; erunt A, & B E, inter ſe æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

Qᴠᴏᴅ ſi duæ rectæ datæ cõiungãtur in vno extremo, quales ſunt B D, & B C, cõiunctæ in extremo vtriuſq; B; deſcribẽdus erit circul⁹ ex B, ad interuallũ minoris B D. Hic. n. auferet B E, æqualẽ ipſi B D, vt cõſtat ex definitione circuli.

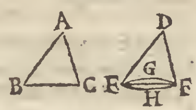
SCHOLION.

Vᴀʀɪᴏs etiam poſſe caſus eſſe in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter ſe diſtent, ita vt neutra alterã cõtingat; vel nõ, ſed vel coniungãtur ad vnũ extremũ, vel ſe mutuo ſecent, vel certe altera alterã ſuo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habeãt, vtrũq; vtriq; ; habeãt vero & angulũ angulo æqualẽ ſub æqualib⁹ rectis lineis cõtentũ: Et baſim baſi æqualẽ habebũt; eritq; triangulũ triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterq; vtriq; , ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sɪɴᴛ

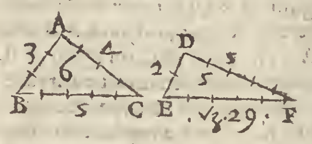


SINT duo triangula ABC,DEF,
& unius utrumque latus A B, A C,
æquale ſit alterius utrique lateri D E,
D F, hoc eſt, A B, ipſi D E, & A C,
ipſi D F; angulusque A, contentus la
teribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus
D E, D F. Dico baſim B C, æqualem quoque eſſe baſi E F;
& triangulum A B C, triangulo D E F; & utrunque an-
gulum B, & C, utrique angulo E, & F, id eſt, angulos B,
& E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter
ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus
A B, D E, inter ſe quoque eſſe æquales. Quoniam angu-
lus A, æqualis ponitur angulo D, fit, ut ſi alter alteri intelli
gatur ſuperponi, neuter alterum excedat, ſed linea A B, con *8. pron.*
gruat lineæ D E, & linea A C, lineæ D F. Cum igitur A B,
& D E, ponantur eſſe æquales, neutra etiam alteram exce-
det, ſed punctum B, cadet in punctum E; Eademque ratio- *8. pron.*
ne punctum C, in punctum F, propter æqualitatem linea-
rum A C, & D F, ex hypotheſi. Itaque cum punctum B,
congruat puncto E, & punctum C, puncto F, neceſſario &
baſis B C, congruet baſi E F, (ut mox demonſtrabitur) ac
propterea illa huic æqualis erit, cum neutra alteram ex- *8. pron.*
cedat; & triangulum A B C, triangulo D E F, & angu-
lus B, angulo E, & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem
cauſam exiſtet.

QVOD autē baſis B C, cōgruat baſi E F, ſi punctū B, pun-
cto E, & punctū C, pūcto F, cōgruit; facile demōſtrabitur. Si
nō cōgruere dicat̃ baſis B C, baſi E F, cadet uel ſupra, ut effi-
ciat rectam E G F, uel infra, ut cōſtituat rectā E H F. Vtrū
uis horum concedatur, claudent duæ lineæ rectæ E F, E G F,
uel E F, E H F, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit, tam
E G F, quam E H F, rectam eſſe, cum utraque ponatur ea-
dem eſſe, quæ recta B C) Quod eſt abſurdum. Duæ enim
rectæ ſuperficiē claudere non poſſunt. Non ergo baſis B C, *12. pron.*
cadit ſupra, uel infra baſem E F, ſed illi congruet. Quare ip-
ſæ inter ſe æquales ſunt, &c. Quocirca, ſi duo trian-
gula duo latera duobus lateribus æqua-
lia habeant, &c. quod demon-
ſtrandum erat.

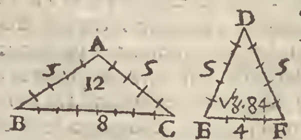
SCHOLION.

RECTE *Euclides duas conditiones poſuit in antecedente huius theorematis, quarum prima eſt, ut duo latera unius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius triãguli, utrumq; utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis ſit angulo alterius contento lateribus, quæ iſtis ſunt æqualia; Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque baſes, neque reliqui anguli poterunt unquam eſſe æquales, triãgula uero admodum raro æqualia exiſtent, ut probe hoc loco a Proclo demonſtratur. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C; æqualia lateribus D E, D F, non quidem utrunque utrique ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitque A B, 3. A C, 4. ut ambo ſimul efficiant 7. At uero D E, ſit 2. & D F, 5. ut ambo quoque ſimul 7. conſtituant.*



Quibus poſitis, erit baſis B C, 5; & baſis E F, radix quadrata huius numeri 29, quæ maior quidem eſt quam 5, minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area uero trianguli D E F, 5. Anguli denique ſuper baſim B C, inæquales erunt angulis ſuper baſim E F. Quæ quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quæ nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia eſſe, propterea quod non utrumque latus utrique lateri æquale exiſtat in dictis triangulis A B C, D E F.

RVRSVS *triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia ſint lateribus D E, D F, utrumq; utrique, ſitq; unumquodq; 5; anguli uero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, ſitque A, maior, quã D.*



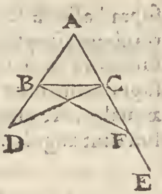
Quibus conceſſis, erit baſis BC, maior baſe EF, ut propoſ. 24. huius libri oſtẽdetur. Quod ſi baſim B C, ponamus eſſe 8. baſim autẽ E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area uero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem eſt quam 9. minor uero, quam 10. id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt

igitur

igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triã gula ipſa æqualia inter ſe ſint; neceſſe eſt, ut utrumque latus unius æquale ſit utriq; lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 5.

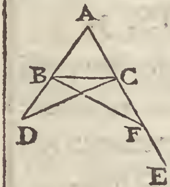
ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.



SIT triangulum Iſóſceles A B C, in quo duo latera A B A C, inter ſe ſint æqualia: Dico angulos A B C, A C B, ſuper baſim B C, æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia A B, A C, producantur quã tum libuerit, uſque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C E C B, infra baſim eandem B C, eſſe æquales. Ex linea enim A E, producta infinite abſcindatur A F, æqualis ipſi A D, & ducantur rectæ B F, C D. Conſiderentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B A F, trianguli A B F, æqualia ſunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, utrumque utrique, nempe A B ipſi A C, ex hypotheſi, & A F ipſi A D ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A, communis eſt utrique triangulo: Erit baſis B F æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & poſteriores, opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis ut patet. Rurſus cõ ſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam uero rectæ A D, A F, æquales ſunt per conſtructionem, fit ut, ſi auferantur ex ipſis æquales A B A C, & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, utrumque utrique, uidelicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B, ut probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, cõ-

3.primi. 1. pet. 4.primi. 3. pron.

tenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam
4. primi fuit. Igitur erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D angulo C B F. Tam enim priores duo quã poſteriores, ęqualibus opponuntur lateribus. exiſtuntq; ſupra communem baſim B C, utriuſque



trianguli B D C, C F B. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demõſtrauimus in prioribus triangulis) detrahãtur anguli æquales C B F, B C D (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe
3. pron. æquales) remanebũt anguli A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe & infra eandem inter ſe quoque ſunt æquales, Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

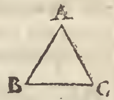
SCHOLION.

HAEC propoſitio uera etiam eſt in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis uideatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus AB, AC, trianguli A B C, æqualibus, ſiue reliquum latus B C, ipſis quoque ſit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, ſiue inæquale, ut in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, ut conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdiſficile, & obſcuriuſculum uideri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Veruntamen, ſi diligenter theorematis præcedentis uis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponũtur. Quod quidem quoniam Campanus non appoſuit, cauſæ fuit, ut confuſa eſſe uideatur, & ſubobſcura eius demonſtratio.

CORO-

COROLLARIVM.

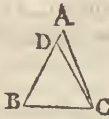
Ex hac propoſitione quinta liquet, omne triangulum ęquilaterum eſſe æquiangulum quoque: Hoc eſt, tres angul oscuiuslibet trianguli æquilateri eſſe inter ſe æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, AC, ſunt æqualia, erunt duo anguli B, & C, æquales. 5. prim. Item quia duo latera A B, B C, ſunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod oſtendendum erat.



THEOR. 3. PROPOS. 6. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

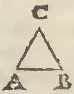
In triangulo A B C, ſint duo anguli ABC, A C B, ſuper latus B C, æquales. Dico duo latera illis oppoſita A B, A C eſſe quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, exiſtentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; ſit igitur A B, maius quam A C, ſi fieri poteſt: Et ex A B, abſcindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur eſſe quam AB,)ducaturq; recta C D. 3. primi Conſiderentur iam duo triangula A C B, DBC. In quibus cum duo latera A C C B, trianguli A C B, æqualia ſint duobus lateribus D B; B C, triãguli D B C, utrumq; utrique, nempe A C, ipſi D B, (abſcidimus enim ex A B, ipſi A C, conceſſu aduerſarij, æqualem D B,) & C B, ipſi B C, cum ſit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: Erunt triãgula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri nõ poteſt. 4. primi Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus B C, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. quod demonſtrandum erat.



SCHOLION.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic uero ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet uideri, ſi Mathematici aliquando conuertunt propoſitiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc uero rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, uideri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens; Cuius ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis unum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figuræ cuiusuis rectilineæ uno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cũ poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, ut ad propos. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemque modo multæ aliæ propoſitiones conuerti nequeunt. Quam ob rem neceſſe eſt, ut prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequẽte conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam uidebuntur afferre utilitatem.

COROLLARIVM.



SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis, ut liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, erunt latera

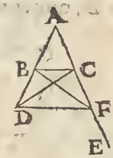
AB

A B, AC, æqualia. Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod oſtendendum erat. 6.primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere ſecundam partem quintæ propoſitionis, hoc modo:

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.



Triãguli enim A B C, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra baſim B C, æquales. Dico latera A B, A C, eſſe quoque inter ſe æqualia. Ex C E, quantumlibet producta abſcindatur C F, æqualis ipſi B D, & ducantur rectæ B F, F D, DC. Conſiderentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia ſint lateribus F C, C B, utrumque utrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B C, ipſi C B, quod ſit unum & idem: ſint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſim: erunt & baſes C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, ſuper has baſes, cum opponantur æqualibus lateribus B D, CF, æquales. Ablatis igitur hiſce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypotheſin æqualibus, remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Conſiderentur rurſus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia ſunt lateribus F C, C D, utrumque utrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B F, ipſi C D, ut modo oſtenſum eſt; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus, D B F, F C D, æquales, ut etiam fuit nuper demonſtratum: Erit angulus B D F, ſuper baſim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, ſuper eandem baſim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, ſint æquales, ut nunc oſtendimus, erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus ſi rectæ B D, C F, æquales, per cõſtructionem, demantur, remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat oſtendendum.

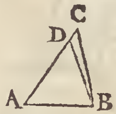
3.primi. 4.primi. 3. pron. 4. primi 6. primi 3 pron.

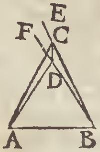
THEOR. 4. PROPOS. 7. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non conſtituentur, ad

aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemq́; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Svper recta A B, conſtituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico ſuper eandem rectam A B, uerſus partem eandem C, nō poſſe ad aliud punctum, ut ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis A C, B C, utraque utrique, nempe A C, ipſi A D, quę eundem habent finem A; & B C, ipſi B D, quæ eundem etiā terminum poſſidēt B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ A C, A D, inter ſe, & rectæ B C, B D, inter ſe etiā æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita ut recta A D, in ipſam rectam A C, uel B D in ipſam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctū D, in altera rectarū A C, B C, nempe in A C, ut A D, ſit pars ipſius A C. Quoniā igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales; Erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non poteſt. Sit ſecundo punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, uſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, erunt anguli A C D, A D C, ſuper baſim C D, æquales; Eſt autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto. Igitur & angulus A D C, minor erit eodē angulo D C E: Quare angulus C D F, pars ipſius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rurſus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, erunt anguli C D F, D C E, ſub baſi C D, æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo ſit minor angulo D C E. Idē ergo angulus CDF, & minor eſt angulo DCE, & eidem ęqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea ſuper alteram cadat, ut in priori figura, dum modo loco D, intelligas C, & loco C, ipſum D; ex quo rurſus

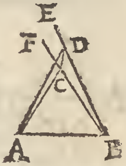


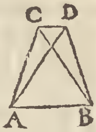


5. primi
9. pron.
5. primi

ſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum: Aut in tali erit loco, ut poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in poſteriori figura, ſi modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C; Quo poſito, in idem abſurdũ incidemus, nempe angulũ D C F, & minorem eſſe angulo C D E, & eidem æqualem, ut perſpicuum eſt: Aut denique punctum D, ita erit extra triangulũ A B C, ut altera linearũ poſteriorum, nempe A D, ſecet alteram priorum, ut ipſam B C. Ducta igitur recta C D, cũ in triãgulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, erunt anguli A C D, A D C, ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde cum angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autem iam oſtenſum, angulum B C D, multo eſſe minorem angulo B D C: Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B D C, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis &c. Quod erat demonſtrandum.







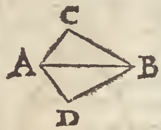
5. primi
9. pron.
5. primi

SCHOLION.

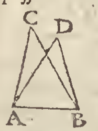
FIERI poteſt, ut duæ lineæ A D, B D, æquales ſint duabus A C, B C, utraque utrique, ut A D, ipſi B C, & B D, ipſi A C, ut ultima figura indicat; Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, ut conſtat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem poſſident A; Itẽ B C, B D, eundem B; optimeq; demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, ut A C, A D, inter ſe ſint æquales, ita ut B C, B D, quoque inter ſe æquales exiſtant. Recte igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc uerba: eoſdemq; terminos cum duabus

duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poßunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, BC, ſimul ſumptis ut in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poße utramque utrique eſſe æqualem, &c.

Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita ut A D, exiens e puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura.



Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Deniq; eſſe poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter ſe, eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, ut reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratũ. Appoſite igitur dictũ eſt in propoſitione: duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c.



Quare vt plane ſcopus Euclidi in hac propoſitione propoſitus intelligatur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.

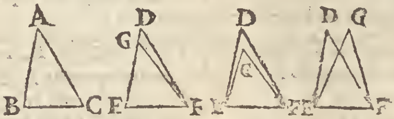
8.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebũt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, utrumque vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; ſit autem & baſis B C, baſi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum uidelicet vterque dictis lateribus cõtinetur.

tinetur. Nam ſi mente intelligatur baſis B C, ſuperponi baſi E F; neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ baſes ponantur æquales inter ſe. Deinde ſi triangulum A B C, cogitetur cadere ſuper triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipſum punctum D, 8. pron.



aut alio. Si punctum A, in ipſum punctum D, cadat, congruent ſibi mutuo triangulorum latera, cũ ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterũ excedat. Quod ſi punctũ A, alio dicatur cadere, ut ad G, quomodocunq; id cõtingat, hoc eſt, ſiue in latus E D, ſiue intra triangulum E D F, ſiue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadem eſt, quæ B A) æqualis ipſi E D; & F G, (quæ eadem eſt, quæ C A) æqualis ipſi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius: Hoc autem fieri non poſſe, iamdudum demonſtratum eſt, cum tam rectæ E G, E D, terminũ eundem E; quam rectæ F G, F D, eundem limitem F, poſſideant. Non igitur punctum A, cadet alio, quam in punctũ D: ac propterea angulus A. angulo D, æqualis erit. Quare ſi duo triãgula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

8. pron.

7. primi.

SCHOLION.

Vt vides, hæc propoſitio conuertit primam partem propoſitionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit baſium æqualitas; ita hic ex æqualitate baſium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Poſſumus eodem modo ex prima, & tertia parte concluſionis quartæ propoſitionis inferre totum antecedens eiuſdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula baſes habuerint æquales, &

angulos ſuper baſes conſtitutos ęquales, utrunque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrunque utrique, quæ uidelicet æqualibus lateribus ſubtendūtur, angulosq; reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

Sit enim baſis B C æqualis baſi EF, & angulus B, angulo E, angulusq; C, angulo D F E; Dico latus quoque A B, lateri D E, & latus A C, lateri DF, æquale eſſe, angulumq; A, angulo D.



8. pron. *Nā ſi baſis baſi ſuperponatur, congruent ſibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia ſibi congruent, proptereaq; omnia inter ſeſe æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propoſitum, quod quidem magis proprie conuertere uidetur quartam propoſitionem, quam illud Euclidis, aliter demonſtrabit Euclides in prima parte propoſitionis 26, ut eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propoſitionis non ſolum colligi poteſt, angulos lateribus æqualibus contentos æquales eſſe, uerum etiam reliquos angulos, qui ad baſes cōſtituuntur, utrumq; utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totū triangulum toti triangulo, ut conſtat ex eadem ſuperpoſitione unius trianguli ſuper alterum; Nam ſibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perſpicuū eſt. Quod etiā ex quarta propos. colligi poterit, poſtquam demonſtratum fuerit, angulos æqualibus comprehenſos lateribus æquales eſſe. Inde enim fiet, cū latera quoque ſint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula eſſe æqualia, ut in propos. 4. demonſtratum eſt.

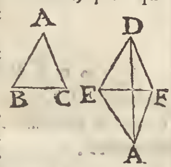
EX PROCLO.

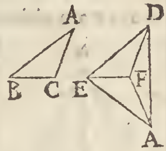
PHILONIS familiares conātur hoc idē theorema oſtēdere demōſtratione affirmatiua: hac ratione. Poſito. n. eodē antecedēte, ſupponi intelligatur baſis BC, baſi E F: ita ut triangulum ABC, cadat in diuerſas partes, & non ſuper triangulum DEF, quale eſt triangulū AEF. Aut igitur duo latera, nēpe D F, F A, conſtituunt unā lineā

rectam



rectam, quod quidem continget, ſi duo anguli C,
& F, recti extiterint; aut non. Si cōſtituant unam li
neam rectam, ueluti D A, ita propoſitum cōclude
tur Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E,
D E, ponuntur æqualia (eſt enim nunc A E, recta
eadem quę A B, quæ per hypotheſin rectæ D E,
æqualis eſt) erunt anguli A, & D, ſuper baſin AD, 5. primi.
ęquales, quod erat oſtendendum. Si uero neque
D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam confi-
ciant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ
uel cadet intra triangula, uel extra. Cadat primo intra, quod qui-
dem accidet, quando anguli ad E, & F, ſunt
acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D,
duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, erunt
duo anguli E A D, E D A, æquales ad baſim
D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, 5. primi
D F, æqualia ſint per hypotheſin, erunt duo
anguli F A D, F D A, ſuper baſin D A, æqua
les. Si igitur hi ęquales illis ęqualibus addā-
tur, fient toti anguli E A F, E D F, ęquales. Quod erat oſtenden 2. pron.
dum. Cadat ſecundo recta D A, extra trian-
gula, quod demum fiet, quando anguli ad F,
fuerint obtuſi. Quoniam igitur in triangulo
A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqua
lia, erunt anguli E A D, E D A, æquales ſu-
per baſin D A. Eadem ratione, cum duo la- 5. primi
tera A F, D F, in triangulo A F D, ſint per
hypotheſin æqualia, erunt anguli F A D,
F D A, ſuper baſin D A, æquales. His er-
go a prioribus ablatis, remanebunt anguli E A F, E D F, æqua- 3. pron.
les; Quod demonſtrandum proponebatur.

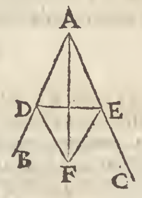




PROBL. 4. PROPOS. 9. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam ſecare.

SIT diuidendus rectilineus angulus
B A C, bifariam, hoc eſt, in duos angulos
æquales. In recta A B, ſumatur quodcunq;
punctū D, & rectæ A D, ſecetur ex A C, re 3. primi
cta A E, æqualis, ducaturque recta D E.
Deinde ſuper D E, conſtituatur trian-
gulum æquilaterum D F E, & ducatur 1. primi
recta A F, diuidens angulum B A C,
in angulos B A F, C A F. Dico hos



augnols

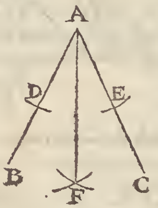
angulos inter ſe eſſe æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia ſint lateribus E A, A F, trianguli E A F, utrumque utrique, quod D A, ipſi E A, per conſtructionem, ſit æquale, & A F, commune; Sit autẽ & baſis D F, baſi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, conſtructum ſit æquilaterum Erit angulus D A F, angu-
8. primi lo E A F, æqualis, ideoque angulus B A C, diuiſus bifariam, quod erat faciendum.

SCHOLION.

QVOD ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum Iſoſceles, nihilo minus idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariã ſecabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales A D, A E, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non uariato (poſſes tamen ipſum uariare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta A F, ſecabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonſtrabitur, angulum D A F, æqualem eſſe angulo F A F. Non deſcripſimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in aliis quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obſeruabimus ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatq́; confuſionem.



SCHOLION.

HINC aperte colligitur, angulũ rectilineũ quemuis diuidi poſſe etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuiſus, ſi horum uterque iterum bifariam ſecetur, habebi-

*habebimus 4. angulos æquales; Quod ſi ſinguli rurſus diui-
dantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & ſic de-
inceps. Non docuit autem Euclides uſquam, neque ab ullo ha-
ctenus fuit demonſtratum, quanam ratione angulus rectilineus
in quotuis partes æquales poſſit diuidi. Si quis tamen id de-
ſideret, uti eum neceſſe erit circino, vt quaſi attentando, & ſæ-
pius repetendo praxin ipſam ad finem deſideratum perueniat;
hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus* B A C, *diuiden
dus in 5. angulos æquales. Ex* A, *centro deſcribatur arcus cir
culi* BC, *ad quodcunque interuallum, ſecans rectas* AB, AC,
in B & C. *Deinde hic arcus officio cir
cini (eius crura modo dilatando magis,
modo reſtringendo, donec debitam ha-
beant diſtantiam; quoniam huius rei
demonſtratio adhuc deſideratur) diui*

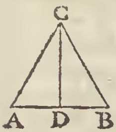


*datur in tot partes æquales in quot angulus propoſitus eſt diui-
dendus, vt iuxta exemplum propoſitum in quinque, in punctis
ſcilicet D, E, F G. Si namque ad hæc puncta ex* A *rectæ du-
cantur lineæ, diuiſus erit angulus* B A C, *in quinque æquales
angulos. Cũ enim circino ſumpta ſint æqualia interualla* B D,
D E, *&c. ſi ducantur rectæ* B D, *D E, &c. erunt hæ omnes in
ter ſe æquales. Quare erunt duo latera* B A, A D, *trianguli* 15. def.
BAD, *æqualia duobus lateribus* E A, A D *triãguli* E A D,
*utrumque vtrique, cũ omnia ex centro egrediantur ad circun-
ferentiã uſque;* B*aſis autẽ* BD *baſi quoque DE, vt dictũ fuit,
æqualis eſt:* A*ngulus igitur* B A D *angulo* E A D *æqualis exi-* 8. primi
ſtet; Eademq; ratione demonſtrabitur, angulum E A D *angu
lo* E A F, *æqualem eſſe, & ſic de cæteris.* B*reuius autem collige
tur, omnes angulos ad* A, *eſſe inter ſe æquales, ex 27. propoſ. ter
tij lib. propterea quod circunferentiæ* B D, D E, *&c. acceptæ
ſint omnes æquales inter ſe ſe. Nemo uero miretur, quod pra-
xes exhibeamus interdum, quarum demonſtrationes ex ſequen
tibus propoſitionibus dependent. Hoc enim eo conſilio facimus,
vt ſingula proprijs in locis tractentur, diuiſio nimirum angu
li rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in
quo Euclides docet diuiſionem eiuſdem anguli in duas partes
æquales; Et diuiſio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, ubi
eandẽ diuidit Euclides bifariã, & ita de ſingulis. Neq; enim
ad praxes huiuſmodi requiruntur ſemper ſequentes demonſtra-
tiones*

tiones, ſed ſolum, ut probetur recte eſſe per ipſas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonſtrationẽ requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, poſtquam demonſtrationes ad eam neceſſarias diligenter perceperit. Nam ſemper propoſitiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonſtrationibus noſtrarum praxium; quemadmodum et in proxima praxi citauimus propoſitionem 27. tertij libri.

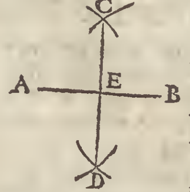
10. PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.

S I T recta finita A B, diudenda bifariam, ideſt, in duas
1. primi partes æquales. Deſcribatur ſuper A B, triangulum æqui-
9. primi laterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, diuidatur bifariam in D. Dico rectam A B, bifariam eſſe diuiſam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, utrumque utrique, nempe A C, ipſi B C, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, eſt commune;

4. primi Eſt autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per conſtructionem: Erit baſis A D, baſi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam ſecuimus in D, quod facere oportebat.

PRAXIS.

Ex centro A, ad quoduis interuallũ, quod tamen dimidiũ lineæ A B, excedat, deſcribãtur duo arcus, unus ſuperne, alter inferne; Et ex cẽtro B, ad idẽ interuallũ omnino alij duo arcus delineentur, q priores ſecẽt in C, & D. Recta igitur ducta C D, ſecabit rectã A B in E, bifariã. Si.n.ex A, & B, ad C, & D. ducant̃ quatuor rectæ, erũt hæ oẽs inter ſe æquales, cũ ex cẽtris ad circũferentias æqualiũ circulorũ cadãt; Nã arcus circulorũ deſcripti ſũt eodẽ interuallo. Quoniã igit̃ latera AC, CD, æqualia ſunt lateribus



teribus B C, C D, vtrumq; vtriq; , & baſis A D, baſi B D, erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rurſus quia latera A C, C E, æqualia ſunt lateribus B C, C E, vtrumq; vtriq; , & angulus A C E, angulo B C E, vt oſtenſum fuit; erit baſis A E, baſi B E, æqualis. 8.primi. 4.primi.

SCHOLION.

PERSPICVVM eſt, eodem modo diuidi poſſe eandem lineā rectā A B, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. ſicuti in propoſitione præcedenti diximus de diuiſione anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea propoſita diuidenda ſit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propoſ. 10. lib. 6. vbi varias, et nō iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur eſſe proprius huic rei locus, cum huiuſmodi praxes fere omnes linearum proportiones expoſcant. Neq; vero indigebimus vnquam diuiſione lineæ in quotlibet partes æquales, ad eum locum vſq;.

PROBL. 6. PROPOS. 11. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectā lineam ad angulos rectos excitare.



RECTA linea data ſit A B, & in ea punctū C, a quo iubemur erigere ſuper A B, lineam ad angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſumatur recta C D, cui æqualis auferatur C E. Deinde ſuper D E, conſtituatur triangulum æquilaterum D E F, atq; ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico eſſe perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia ſunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumq; vtriq; , nempe D C, ipſi E C, per conſtructionem, & C F, commune; Eſt vero & baſis D F, baſi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. Quare dicetur vterq; rectus, atq; adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data 3.primi. 1.primi. 8.primi. 10. def.

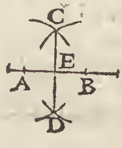
E igitur

igitur recta linea a pũcto in ea dato &c. quod faciendũ erat.

PRAXIS.

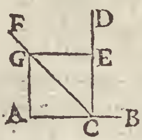


Ex puncto C, abſcindantur vtrinq; lineæ æquales C D, C E. Et ex D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſe ſe in F. Recta namq; ducta F C, erit perpendicularis: Demonſtratio eadem eſt, quæ Euclidis, ſi modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, deſcriptos, qui ſe interſecant in puncto F. Quodſi punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur ſecundum praxim datam linea perpendicularis. Vt ſi linea data fuerit A C, & punctũ datũ C, extremũ; protrahenda erit A C, in B, & ſumendæ æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam conſtituenda ſit linea perpendicularis, non quidem in puncto aſſignato, ſed vtcumq;, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuſcunq; lineæ propoſitæ deſcribantur tam ſuperne, quam inferne duo arcus ſe ſe interſecantes in C, & D. Nam recta ducta C D, erit perpendicularis ad A B. hoc eſt, faciet duos angulos ad E, rectos, ſeu æquales. Quod non aliter probabis, quam ſupra praxim, qua lineam in duas æquales diuiſimus partes, demonſtrauimus. Nam per 4. propoſ. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui ſuper æquales baſes A E, B E, conſiſtunt, opponunturq; æqualibus lateribus A C, B C.



EX PROCLO.

Si punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides; & abſcindatur C E, æqualis ipſi A C: Deinde diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta C F; Et ex E, rurſus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis

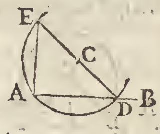


3. primi.
9. primi.

dicularis ad C D, ſecans rectã C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cum latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia ſint lateribus E C, C G, triãguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hiſce lateribus contenti æquales quoque, per conſtructionem: Erunt anguli A, & E, oppoſiti communi lateri C G, æquales; Sed E, eſt rectus per conſtructionem; igitur & A, rectus erit, ideoq; A G, ad A B, perpendicularis. *4.primi.* *10. def.*

SCHOLION.

BREVIVS *lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, ſiue extremum illud ſit, ſiue non, hoc modo. Sit data linea* A B, *punctumq; in ea* A. *Ex centro* C, *extra lineã aſſumpto, vbi libuerit, (dũmodo recta* A B, *producta cum ipſo non cõueniat) interuallo vero accepto vſq; ad* A, *deſcribatur arcus circuli ſecãs* A B, *in D.*

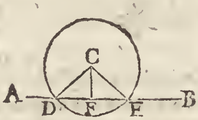


Et ex D, per C, recta ducatur ſecans arcum in E. Recta igitur ducta E A, *erit perpendicularis ad* A B. *Nam angulus* A, *eſt rectus, cùm ſit in ſemicirculo D* A *E, vt oſtendemus propoſitione 31. lib. 3.*

PROBL. 7. PROPOS. 12. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

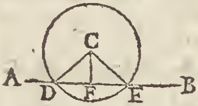
SIT recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipſam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Cẽtro C, interuallo vero quolibet circulus deſcribatur ſecans A B, in D, & E. (quoniam interuallum aſſumptum tantum eſſe debet, vt tranſcendat rectam A B; alias eam non ſecaret.) Diuiſa autem recta D E, biſariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularẽ eſſe ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, *1. primi.*



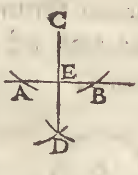
8.primi. F C, trianguli, E F C, vtrumq; vtriq;, per conſtructionem; eſt autem & baſis C D, baſi C E, æqualis, cum hæ ſint ex centro C, ad circunferentiam: Quare erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterq; rectus. Ducta eſt igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLION.

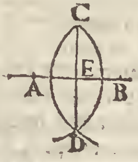
PROBE appoſuit Euclides hãc particulam: infinitam. *Si enim linea eſſet finita, non poſſet ſemper a puncto dato extra ipſam perpendicularis ad eam deduci. Vt ſi linea finita eſſet* B E. *& punctum* C. *non poſſet ex* C, *deſcribi circulus ſecans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex* C, *perpendicularis duci ad* B E *Hac igitur de cauſa vult Euclides, rectam datam eſſe infinitam, hoc eſt, non habere magnitudinem determinatam, vt ſaltem ad ipſam productam perpendicularis poſſit deduci. Ita enim fiet hic, ſi* B E, *producatur, donec circulus ex* C, *deſcriptus ſecet totam* B A, *productam in* D, *&* E, *&c.*



PRAXIS.



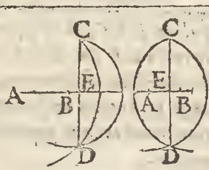
CENTRO C, *& interuallo quouis eodem, deſcribantur duo arcus ſecantes rectam datam in* A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodẽq; interuallo, vel alio ſi placuerit, alij duo arcus deſcribantur ſecantes ſe in* D. *Nam ducta recta* C D, *ſecans* A B, *in* E, *erit perpendicularis ad* A B. *Demonſtratio huius operationis non differt a demonſtratione tradita in praxi propoſitionis* 10. *Nam anguli ad* E, *erũt recti, nempe inter ſe æquales.* 4.primi.



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis pũcto A, *in linea data & interuallo vſq; ad* C, *aſſumpto, arcus circuli deſcribatur: Deinde ex quolibet alio puncto* B, *interualloq; vſq; ad idem* C, *alius arcus deſcribatur priorem ſecans in* C, *&* D; *Eritq; ducta recta* C D, *ſecans* A B, *in* E, *perpendicularis ad* A B.

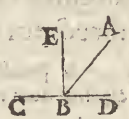
Demon

Demonſtratio eadem eſt quæ prior. Non eſt autem neceſſe, vt interuallum B C, æquale ſit interuallo A C, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio ſi idem ſemper interuallum accipiatur.



THEOR. 6. PROPOS. 13. 13.

CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineã angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA A B, cõſiſtens ſuper rectam CD, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B fuerit perpendicularis ad C D, erũt dicti anguli duo recti. *10. def.* Si vero A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtuſum; alterum vero acutum. Dico igitur ipſos duobus eſſe rectis equales. Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, *11. primi.* vt ſint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero duo anguli D B A, A B E, æquales ſunt angulo recto *18. pron.* E B D; appoſito communi angulo recto E B C, erunt tribus angulis D B A, ABE, EBC. æquales duo recti EBD, EBC: *2. pron.* Rurſus quia duo anguli A B E, E B C, æquales ſunt angulo *18. pron.* A B C; appoſito communi angulo A B D, erunt tribus angulis D B A, ABE, E B C, æquales duo anguli ABC, ABD: *2. pron.* ſed illis tribus oſtenſum fuit eſſe etiam æquales duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, inter ſe ſunt æqualia: *1. pron.* Duo igitur anguli ABC, A B D, æquales ſunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam, &c. Quod oſtendere oportebat.

SCHOLION.

VIDETVR hæc propoſitio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, ſuperat rectum an-

 gulum

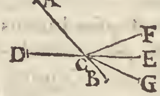
gulum E B C, eo reliquus angulus A B D, ſuperatur ab angulo recto E B D. Nam ſicut ibi exceſſus eſt angulus A B E, ita hic defectus eſt idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales eſſe conuincuntur, ſiquidem tantum vnus eorum ſupra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuerſas partes eductæ ſint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A C, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipſas C D, C E, inter ſe eſſe conſtitutas in directum, ita vt D C E, ſit vna linea recta. Si enim nō eſt recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut ſupra C E, vt ſit recta D C F, aut infra C E, vt ſit recta D C G. Si cadit ſupra, cū A C, conſiſtat ſuper rectam D C F, fient duo anguli



13. primi. A C D, A C F, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo angulo A C D, A C E, æquales duobus rectis; & omnes recti ſunt inter ſe æquales: Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt æquales. Ablato igi-

3. pron. tur communi angulo A C D, remanebunt anguli A C F, A C E, inter ſe æquales, pars & totum, quod eſt abſurdū. Non igitur recta D C, producta cadet ſupra C E; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta cadem efficietur, quæ C E; proptereaq;, ſi ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c.

Quod demonſtrandum erat.

SCHO-

SCHOLION.

Eſt hæc propoſitio præcedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi D C E ſit recta, angulos A C D, A C E, duobus eſſe rectis æquales; In hac vero demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas D C, E C, eſſe vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propoſitione hac: & non ad eaſdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eaſdem partes duæ lineę ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eo quod non ad diuerſas ſint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Duca-



tur C D, perpendicularis ad A B, diuidaturq; re-
ctus angulus A C D, bifariam per rectam C E. 11.*primi.*
Deinde ex D, quolibet puncto rectæ C D, ducatur 9.*primi.*
D F, perpendicularis ad C D, ſecans rectam C E, 11.*primi.*
in E. Producta autem E D, ad partes D, ſumatur
D F, æqualis rectæ D E, & ducatur recta F C. 3.*primi.*
Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli EDC,
æqualia ſunt lateribus F D, D C, trianguli F D C,
vtrumq; vtriq;, & anguli D, ipſis contenti æqua-
les, nempe recti; erit baſis E C, baſi C F, æqualis, & angulus
E C D, angulo F C D. Sed angulus E C D, dimidium eſt recti: 4.*primi.*
(Eſt enim rectus A C D, diuiſus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem C E, cum eadem A C, angulum A C E, dimidium etiam recti: Duo igitur anguli A C F, A C E, quos ad eaſdem partes faciunt rectæ C F, C E, cum A B; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen C F, C E, non ſunt vna linea recta, propterea quod non ſunt ductæ ad diuerſas partes, ſed ad eaſdem.

THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticē æquales inter ſe efficiēt.

SECENT ſe duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcūq;. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C,

 &an-

& angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E,
13. primi conſiſtit ſuper rectam A B, erunt duo anguli A E D, D E B,
æquales duobus rectis. Rurſus quia recta B E, ſuper rectam



C D, conſiſtit, erũt eadem ratione duo
10. pron. anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cum igitur omnes recti anguli
inter ſe ſint æquales; erunt duo anguli
3. pron. A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales.
Dempto igitur cõmuni angulo D E B, remanebit angulus
A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter ſe æquales eſſe. Nam duo
anguli A E C, C E B, (qui duobus ſunt rectis æquales per
præcedentem) æquales erunt duobus angulis D E B, B E C,
(qui per eandem præcedentem duobus rectis ſunt æquales.)
3. pron. Ablato igitur angulo communi B E C, remanebunt anguli A E C, B E D æquales inter ſe. Si igitur duę rectæ lineæ
ſe mutuo ſecuerint, &c. Quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM. I.

EVCLIDES colligit ex demonſtratione huius theorematis, (ex ſententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent). duas lineas rectas ſe mutuo ſecantes efficere ad punctum ſectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonſtratione oſtenſum fuit, tam duos angulos A E D, D E B quam duos A E C, C E B, duobus eſſe rectis æquales, per 13. propoſ. Omnes igitur quatuor anguli ad E, conſtituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales exiſtunt.

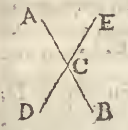
COROLLARIVM. II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum conſtitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales eſſe. ſi enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur ſolummodo illi quatuor ad E, conſtituti in plu-
18. pron. rimas partes, quæ omnes ſimul ſumptæ totis ſuis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales ſint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij ſimul ſumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perſpicuum eſt, omne ſpatium punctum aliquod in plano circunſtans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores aſſerunt, quia omnes anguli, qui circa illud punctum conſtitui poſſunt, quatuor ſunt rectis angulis æquales. Simili modo conſtat, quotlibet lineas rectas ſe inuicem ſecantes, facere ad punctum ſectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PRO-

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad eiuſq; ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales ſecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erũt.



Ex puncto C, rectę A B, in diuerſas partes egrediantur duę rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter ſe ęquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnã lineam rectam. Quoniam cum angulus A C E, æqualis ſit angulo B C D, addito communi angulo B C E, erunt duo anguli A C E, E C B, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed anguli A C E, E C B, ſunt æquales duobus rectis; Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E, erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuerſum eſt propoſitionis decimæ quintæ. 2. *pron.* 13. *primi.* 14. *primi.*

EX PELETARIO.

Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctę.



EX puncto A, quatuor lineę eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppoſitos BA E, C A D, inter ſe æquales: Item duos B A C, D A E, inter ſe æquales. Dico tam B A, A D, facere vnã lineam rectam, quam C A, A E. Quoniam æquales ſunt anguli B A E, C A D, ſi æquales illis addantur anguli B A C, D A E, erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quam hi, dimidium ſunt quatuor angulorum circa punctum A, conſiſtentium: At hi quatuor æquales ſunt quatuor rectis per 2. coroll. præcedentis propoſ. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales ſunt duobus rectis; atque adeo C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto oſtendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli B A E, B A D, æquales duo- 2. *pron.* 4. *primi.*

les duobus angulis D A C, C A B; Quare vt prius, concludetur propoſitum. Peletarius autem demonſtrat hoc idem ratione du cente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonſtrationem noſtram oſtenſiuam eius demonſtrationi iure optimo præpoſuimus.

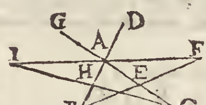
16.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto; externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito, maior eſt.

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D; Dico angulum externum D A C, maiorem eſſe interno, & oppoſito A C B, itemq; maiorem interno, & oppoſito A B C. Diuidatur enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F, abſciſſa ſit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia ſunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumq; vtriq;, per conſtructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehenſi, inter ſe æquales, cum ſint circa verticem E, & oppoſiti: Erit baſis C B, æqualis baſi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Eſt autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & oppoſito angulo A C B. Quod ſi latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturq; recta C H I, vt H I, æqualis ſit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonſtrabitur eadem prorſus ratione, angulum externum G A B, maiorem eſſe interno angulo, & oppoſito A B C: Eſt autem angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cū lineæ B D, C G, ſe mutuo ſecent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & oppoſito angulo A B C. Eſt autem idem angulus D A C, maior quoq; oſtenſus angulo interno, & oppoſito A C B. Cuiuſcunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonſtrandum erat.

10. primi. *3. primi.*



15. primi. *4. primi.* *15. primi.*

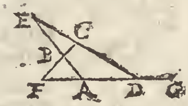
SCHO-

SCHOLION.

NON dixit Euclides angulum externum D A C, maiorẽ eſſe angulo B A C, interno, qui ſibi eſt deinceps; ſed ſolum magnitudine ſuperare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, ſibiq; oppoſitorum: quoniam externus angulus æqualis poteſt eſſe angulo interno ſibi deinceps, quando ſcilicet externus rectus eſt; Tunc enim neceſſario is, qui ſibi eſt deinceps, rectus quoq; erit: Poteſt & eſſe minor, quando nimirum eſt acutus; Hoc enim poſito, angulus illi deinceps obtuſus erit: Solum ergo, quando obtuſus erit externus, ſuperabit internum ſibi deinceps; Hic enim neceſſario acutus exiſtet. Quæ omnia facile colliguntur ex propoſ. 13. Nam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales ſunt duobus rectis.

ID vero, quod in ſcholio propoſ. 6. huius libri nos demonſtraturos recepimus, nimirum hanc propoſ. non poſſe conuerti, ſcilicet & vno latere figuræ quadrilateræ producto, extern⁹ angul⁹ quolibet interno, & oppoſito poſſit eſſe maior; hac rõne abſoluem⁹.

SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtuſus, & A B C, rectus conſtituatur, hac tamen lege, vt rectæ A B, D C, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ D A, C B, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Dico, ſi A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem eſſe tribus internis B A D, A B C, B C D, ſibi oppoſitis. Cũ enim A D E, triangulum ſit, erit angulus externus E D G, maior interno oppoſito D A E. Rurſus cum D A B, obtuſus maior ſit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipſo A B C. Poſtremo, quia & in triangulo C D F, angulus externus C D G, maior eſt interno, & oppoſito F C D; manifeſtum eſt, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorem eſſe internis, & oppoſitis B A D, A B C, B C D. Quã ob rem propoſitio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & conſequens non reciprocentur, vt demonſtratum eſt.



16. primi.

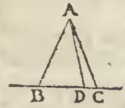
16. primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propoſitione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineã rectã non poſſe duci plures lineas rectas, quã duas

inter

inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D.



Quoniam igitur latera A B, A C, ſunt æqualia,
5. primi. erunt anguli A C B, & A B C, æquales ſuper baſim B C: Rurſus quia latera A B, A D, ſunt æqualia,
5. primi. erunt anguli A D B, & A B C, ſuper baſim B D, æquales. Quare cum vterq; angulus A C D,
1. pron. & A D B, æqualis ſit angulo A B C, erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno oppoſito, quod eſt abſurdum, cum per hanc 16. propoſ. externus interno maior ſit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter ſe æquales, ex A, ad B C, poſſunt duci. Quod eſt propoſitum.

17.

THEOR. 10. PROPOS. 17.

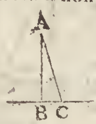
CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.



SIT triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores eſſe duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D,
16. primi. & E. Quoniam igitur angulus A B D, externus maior eſt interno & oppoſito angulo A C B, ſi addatur communis
4. pron. angulus A B C, erunt duo anguli A B D, A B C, maiores
32. primi. duobus angulis A B C, A C B; ſed A B D, A B C, æquales ſunt duobus rectis; Igitur A B C, A C B, minores ſunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis: Item duo B A C, & B C A. Cuiuſcunq; igitur trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quã vnã.



Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdũ.
17. primi. Sunt enim quilibet duo anguli in triãgulo quocunq; oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendicu-

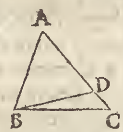
pendiculares, quam vna, ex A, ad B C, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunq; reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores eſſe fateamur.

THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.



IN triangulo A B C, ſit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, ſubtenſum a maiori latere A C, maiorem eſſe angulo A C B, qui a minori latere A B, ſubtenditur. Nā ex A C, auferatur A D, æqualis ipſi A B, *3. primi.* & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia ſunt per conſtructionē, erunt anguli A B D, A D B, æquales: Eſt autem angulus A D B, maior *5. primi.* angulo A C B; Igitur & angulus A B D, maior erit an- *16. primi.* gulo A C B. Quamobrem cum angulus totus A B C, ma- *9. pron.* ior adhuc ſit angulo A B D; Erit angulus A B C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, ſi latus A C, maius ponatur latere B C, oſtendes angulum A B C, maiorem eſſe angulo B A C; ſi nimirum ex C A, abſcindatur linea æqualis ipſi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit; Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.



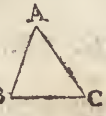
EX hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni eſſe inæquales, vt monuimus defin. 25. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidē latus A C, minimū autem B C; & medium locum habens A B. Dico eiuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propoſ. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior

erit an-

erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus uero A; & C, mediũ locũ inter vtrũq; tenẽs.

18. THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus A C, ſubtendens maiorem angulũ B, maius eſſe latere A B, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus A C, maius non eſt latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale eſſe ipſi A B, erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero A C, minus eſſe dicatur latere A B, erit angulus B, ſubtenſus a minori latere A C, minor angulo C, ſubtenſo a maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdũ. Cũ igitur A C, latus neq; æquale ſit lateri A B, neq; minus eo, erit maius. Eadẽ ratione probabitur, latus A C, maius eſſe latere B C, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.

5.primi.

8.primi.

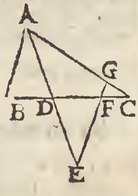
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idẽ theorema oſtẽdere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis, ſi tamen prius demonſtretur hoc ſubſequens theorema.

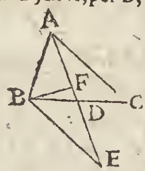
SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit; ſecansq, angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus vero, quod cũ minori.

TRIANGVLI A B C, angulus BAC, diuidatur bifariã per rectã A D, quę ſecet baſin B C, in partes inequales, maiuſq; ſegmentum

tũ ſit D C. Dico latus A C, maius eſſe latere A B. Producatur enim A D, ad E, vt ſit D E, æqualis ipſi A D; Deinde *3. primi*
ex maiori ſegmẽto D C, auferatur recta D F, æqualis minori ſegmẽto D B, & ꝑ F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, triãguli A D B, æqualia sũt lateribus E D, D F, triãguli E D F, vtrũq; vtriq;, per cõſtructionẽ; ſunt aũt & anguli A D B, E D F, dictis *15. primi.*
lateribus cõtenti æquales; Erunt baſes A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, *4. primi.*
æqualis: Eſt vero & angulus C A D, angulo B A D, æqualis, ꝑ hypotheſin; Igitur anguli G A D, G E A, trianguli *1. pron.*
A G E, æquales erũt, ideoq; latera A G, E G, æqualia erũt. Eſt aũt *6. primi.*
recta A C, maior quã A G; quare & A C, maior erit, quã E G; Et q̃a E G, maior eſt, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonſtratum ſit rectam E F, æqualem eſſe rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat oſtendendum.



Hoc oſtenſo theoremate, ita propoſitio 19. demonſtrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior ſit angulo C. Dico latus A C, maius eſſe latere A B. Diuiſa enim recta B C, (ſuper quam conſtituti ſunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, vt ſit D E, æqualis ipſi A D; ducaturq; recta B E. Quoniam igitur late- *3. primi.*
ra A D, D C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrũq; vtriq;, per conſtructionem; ſunt autẽ & anguli A D C, *15. primi.*
E D B, dictis comprehenſi lateribus æquales: Erũt baſes A C, & B E, æquales, anguluſq; A C D, an- *4. primi.*
gulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, ponitur eſſe minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam ſecetur per rectam B F, cadet B F, ſupra B D, eo quod angulus A B D, maior ſit angulo E B D. Quia vero E F, maior eſt, quam *9. pron.*
E D, & E D, poſita eſt æqualis ipſi A D, erit E F, maior, quã A D; Sed adhuc A D, maior eſt, quã A F; Multo igitur maior erit E F, *9. pron.*
quam A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariã, ſecat baſin A E, inæqualiter in F, eſtq; maius ſegmentum E F, minus aũt A F, erit per theorema a Proclo proxime demõſtratu, latus B E, maius latere A B. Oſtẽſum eſt aũt B E, æquale eſſe lateri A C; Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Q đ erat demonſtrandũ.



SCHOLION.

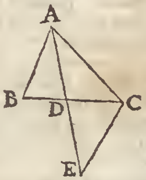
Haec propoſitio 19 cõuerſa eſt propoſitionis 18, vt perſpicuũ eſt. Campanus autem duarũ iſtarũ propoſitionũ ordinẽ prorſus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos eſt 18. apud ipſum ſit 19. & contra. Quarum vtramque oſtendit ducendo ad id,

quod

quod fieri nequit, cum tamen Euclides propoſitionem 18. directe, & oſtenſiue confirmauerit, vt ex dictis liquido conſtat.

POTERIMVS *quoque Theorema a Proclo demonſtratum conuertere, hoc modo.*

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſq; ſegmentum erit prope maius latus.



DVO latera AB, A C, trãguli ABC, ſint inæqualia; A C, maius, & A B min⁹ Recta autem A D, diuidẽs angulũ BAC, bifariã, ſecet baſin B C, in D. Dico ſegmentum D C maius eſſe ſegmẽto D B. Si enim nõ eſt maius, erit vel æquale vel minus. Si dicatur eſſe æquale; producatur A D, ad E,

3. primi. *vt D E, æqualis ſit ipſi D A, ducaturq; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, æqualia ſunt lateribus E D, D C, vtrumq; vtriq; A D, videlicet ipſi E D per conſtructionem, & D B ipſi D C, per hypoteſin aduerſarij; Sunt autem & an-*

15. primi. *guli ad D dictis lateribus contenti æquales: Erit baſis A B,*

4. primi. *baſi E C, æqualis, & angulo B A D, angulus C E D. Poſitus autẽ eſt & angulo B A D, angulus C A D, æqualis; Igitur &*

6. primi. *anguli C E D, C A D æquales erunt; Ideoq; latus A C lateri E C, æquale. Cũ igitur oſtenſum ſit, lateri E C, æquale eſſe quoq;*

1. pron. *latus A B, erunt latera A C A B, æqualia; quod eſt abſurdũ, quia A C, maius ponebatur, quã A B Non igitur erit ſegmentum D C, ſegmento D B, æquale. Quod ſi D C, dicatur eſſe minus, & D B, maius; erit, per theorema Procli latus A B, maius latere A C; Ponebatur autem minus, quod multo magis eſt abſurdum. Non igitur minus erit D C, quam D B. Quare erit neceſſario maius.*

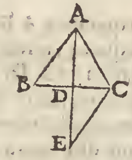
EODEM *modo demonſtrari poterit hoc theorema.*

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, baſin bifariam quoq; ſecet, erunt duo

latera

latera angulum continentia inter ſe æqualia: Quod ſi latera æqualia fuerint, baſin etiam bifariam ſecabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMO recta A D, ſecans angulum B A C, bifariam, diuidat quoque baſin B C, in D, bifariam; Dico latera A B, A C, inter ſe æqualia eſſe. Hoc autem demonſtrabis eadem ratione, qua in præcedenti theoremate oſtenſum fuit, latus A C, æquale eſſe lateri A B, ſi D C, ſegmentum ſegmento D B æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo conſtruas. Cum enim latera A D, D B, æqualia ſint lateribus E D, D C; & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; erunt baſes A B, E C, æquales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, æqualis: Quare A C, æquale erit ipſi E C, hoc eſt, ipſi A B. 15. primi. 4. primi 6. primi



SECVNDO ſint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, ſecans baſin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam; Dico ſegmentum D C, æquale eſſe ſegmento D B. Cum enim latera A D, A B, æqualia ſint lateribus A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypotheſin; erũt baſes B D, D C, æquales. 4. primi

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

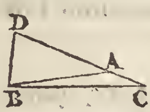
OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta.

SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, ſimul maiora eſſe reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, ut C A, uſque ad D, ſitque recta A D, æqualis alteri lateri A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter ſe ſunt, per hypotheſin, 3. primi



F

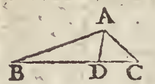
5. primi thesin, erunt anguli A B D, A D B, æquales inter ſe: Eſt au-
9. pron. tem angulo A B D, maior angulus C B D; Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppo-



19. primi ſitum maiori angulo C B D, maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, ſimul æqualia ſint ipſi C D, (ſi enim
2. pron. æqualibus A B, A D, commune addatur A C, fient tota æqualia; nimirum linea compoſita ex A B, A C, & linea cõpoſita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, ſimul maiora latere B C. Eodem modo demonſtrabitur, quælibet alia duo latera maiora eſſe reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora &c. Quod demonſtrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora eſſe latere B C. Diuidatur angulus B A C,



9. primi illis lateribus contentus bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum eſt ad B, erit angulus externus
16. primi B D A, maior interno & oppoſito C A D; igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B,
19. primi oppoſitum maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe, quam
16. primi C D, quia angulus C D A, maior eſt angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademque eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus bifariam ſecetur.

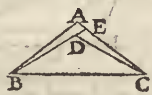
21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maio-

maiorem uero angulum continebunt.

In triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulũ cõſtitutãtur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes: Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At uero angulũ B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, maiora ſunt latere B E. ſi addatur commune E C, erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rurſus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, maiora ſunt latere C D; ſi commune apponatur D B, erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Oſtenſum uero iam fuit B A, C A, maiora eſſe, quam B E, E C; Multo igitur maiora erunt B A, C A, quã B D, C D. quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, maior eſt angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque eſt eandem ob cauſam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod ſecundo proponebatur. Si igitur ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.



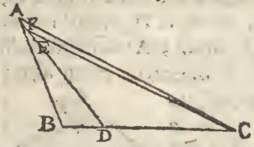
20. primi. *4. pron.* *20. primi.* *4. pron.* *16. primi.*

SCHOLION.

Qvam recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperte intelligi poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus; in triangulis uidelicet rectangulis, uel etiam amblygonijs, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper unum latus circa angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur, ita vt hæ conſtitutæ maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

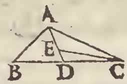
EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A BC, obtuſum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope aliud extremum B, lateris BC, duci poſſe duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores ſint duobus lateribus B A, AC. Ducatur enim recta D A: Et quoniā in triangulo A B D, duo anguli



17. primi. A B D, A D B, minores ſunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtuſus; erit ADB,
19. primi minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, ma-
3. primi ius erit latere A B. Ex D A, abſcindatur recta D E, æqualis rectæ
10. primi A B; Et reliqua linea A E, bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duę lineę rectæ conſtitutę C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam in triangulo A F C, duo latera A F, F C, maiora ſunt
20. primi latere A C; Eſt autem recta A F, ipſi F E, ęqualis, per conſtructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur
4. pron. ęqualia addantur E D, & A B, fient rectę C F, F D, maiores lateribus C A, A B. Quód eſt propoſitum. Quod ſi ad F, ex B, extremo recta duceretur, eſſent duæ rectę conſtitutę C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, ut Euclides demonſtrauit.

RURSUS ſit triangulum ſcalenum A B C, cuius latus maximū
3. primi BC, minimum A B. Ex B C, auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, ut ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Conſtitutę igitur erunt intra triangulum duę lineę C E, D E, quę minorem angulum comprehendūt eo, quē efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim



5. primi duo latera B A, B D, ęqualia ſint, erunt duo anguli B A D, B D A,
16. primi ęquales: Sed B D A, angulus maior eſt angulo C E D; Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod eſt propoſitum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum conſtitutas educi debere ab extremis punctis unius lateris, ut minores quidē ſint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem uero complectantur angulum. Alias enim propoſitio uera non eſſet, ut iam eſt demonſtratum.

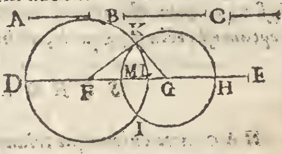
22.

PROBL. 8. PROPOS. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere

ſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam uniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

Tres lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, ut conſtat ex propos. 20, in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis abſcindatur recta D F, æqualis rectæ A, 3. primi Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo uero F D, circulus deſcribatur D I K: Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus deſcribatur H I K, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K; (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; ſi ex F E, ſumatur recta F L, æqualis ipſi F D; & ex G D, recta G M, æqualis ipſi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namq; M, caderet in L, punctum, eſſent G L, F L, hoc eſt, G H, & F D, æquales rectę F G: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ minores recta F G; quorum utrumq; eſt contra hypotheſin.) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducatur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C. Cum enim recta F K, æqualis ſit rectæ F D, & 15. def. recta A, per conſtructionem eidem F D, æqualis; erit latus F K, rectæ A, æquale: Rurſus quia G K, æqualis eſt ipſi 1. pron. G H, & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Cōſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipſi B, quam nunc volumus eſſe baſin: Deinde ex D ad interuallũ rectæ A, arcus deſcribatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus ſecans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter interuallum ipſius A, aſſumptum: & latus E F, ipſi C, propter aſſumptum interuallum C; D E, vero latus, acceptum eſt rectæ B, æquale, ab initio.



SCHOLION.

HAC arte cuicunque triangulo propoſito alterum prorſus æquale & quoad latera, anguloſq;, & quoad aream ipſius, conſtituemus. Sit namque triangulum quodcunque A BC, cui æquale omni ex parte eſt conſtruendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, BC, CA, quarum quælibet duæ maiores ſunt reliqua. Deinde ſumo rectam D E, æqualem uni lateri, nempe B C; & ex D interuallo lateris A B, arcum deſcribo, item aliũ ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorẽ ſecet in F, &c.



20. primi

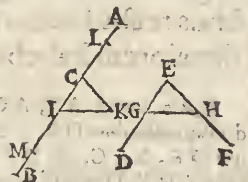
23. PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

DATA recta ſit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta utcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde conſtituatur triangulum C I K, habens

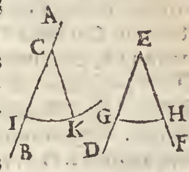
22. primi.

habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita ut C I, æquale ſit ipſi E G; & C K, ipſi E H; & I K, ipſi G H. (Quod facile fiet, ſi C I, ſumatur æqualis ipſi E G; & C L, ipſi E H; & I M, ipſi G H; Deinde ex centris C, & I, interuallis uero C L, & I M, circuli deſcribantur ſecantes ſe ſe in K, &c.) Dico angulum C, æqualem eſſe angulo E. Quoniam duo latera C I, C K, æqualia ſunt duobus lateribus E G, E H, vtrumq; vtrique, & baſis I K, baſi G H, per conſtructionem; erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. 8.primi.



PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulũ conſtituere oporteat æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur, ut perſpicuũ eſt. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus deſcribatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus deſcribatur I K, ſumaturq; officio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam ſi ducerentur rectæ I K, G H, eſſent ipſæ æquales, propterea quod circino non variato vtramque diſtantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia ſint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus ſunt deſcripti; erunt anguli I C K, G E H, æquales. 8.primi.

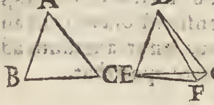


THEOR. 15. PROPOS. 24. 24.

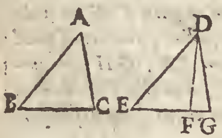
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;,

angulum vero angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebunt.

Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, utrumque utrique; nẽpe A B, ipſi D E; & A C, ipſi D F; Angulus uero A, maior ſit angulo E D F. Dico baſin B C, maiorem eſſe baſe E F. Ad lineam enim D E, ad eiúſque pun-



23. *primi* ctũ D, conſtituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cùm angulus E D F, minor ponatur angulo A) ponaturque D G, æqualis
3. *primi* ipſi D F, hoc eſt, ipſi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut ſupra rectam E F; aut in ipſam, aut infra ipſam: Cadat primo ſupra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia ſunt lateribus D E, D G utrumq; utrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per conſtru-
4. *primi* ctionem; Erit baſis B C, baſi E G, æqualis. Rurſus quia duo
5. *primi* latera D F, D G, inter ſe ſunt æqualia; erunt anguli D F G,
9. *pron.* D G F, æquales: Eſt autem angulus D G F, maior angulo E G F: Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eo-
19. *primi* dem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, maius erit latus E G, latere E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe

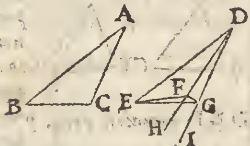


ipſi B C. Maior igitur erit quoque B C, quàm E F. Quod eſt propoſitum.

Cadat ſecundo E G, in ipſam E F. Et quia rurſus, ut prius,
4. *primi.* baſis E G, æqualis eſt baſi B C: Et
9. *pron.* E G, maior quam E F: erit & B C, maior, quam E F, quod eſt propoſitum.

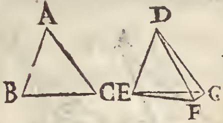
Cadat tertio E G, infra E F; producanturque rectæ D F, D G, uſque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit au-
4. *primi.* tem rurſus, ut prius, baſis E G, baſi B C, ęqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia ſunt inter ſe, per conſtructionem

ctionem; erũt anguli G F H, F G I, infra baſin F G, æquales: Eſt autem angulus F G I, maior angulo F G E; Igitur & angulus G F H, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, maius erit latus E G, latere E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe ipſi B C. Maior igitur erit quoque B C, baſis, baſi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum. 5. primi 9. pron. 19. primi.

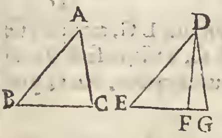


SCHOLION.

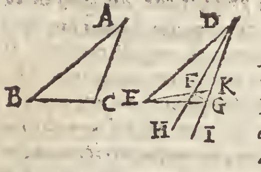
SI quis forte roget, cur in 4. propoſitione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluſerit non ſolum æqualitatem baſium; verum etiam triangulorum & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrunque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehenſi inæquales, colligat tantum inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, & reliquorũ angulorum: Huic reſpondendum eſt, neceſſario id ab Euclide peritiſſimo Geometra eſſe factum. Nam ex antecedente huius theorematis ſemper conſequitur baſium inæqualitas, ita vt baſis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus aſſumptis eſt maior, ſuperet baſin alterius trianguli, cuius angulus minor exiſtit, ut demonſtratum eſt; Non autem neceſſe eſt, triangulum illud maius hoc eſſe. Vt enim clariſſime ex Proclo demonſtrabimus ad propoſ. 37 huius primi libri, Triangulũ maiorem habens angulum aliquando æquale eſt triangulo minorem habenti angulum, aliquando uero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in uniuerſum inferri, ex eo, quod angulus unius trianguli maior eſt angulo alterius, triangulum etiam maius eſſe, cum modo æquale ſit, modo minus & modo maius. Idem dici poteſt de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor



nor eſt ſemper angulo D E F; cum angulus D E G, (qui æqualis eſt, per 4. propos. angulo A B C,) 9. pron. *minor ſit eodem angulo D E F, pars toto. In ſecunda autem figura, exiſtit quidem angulus A B C, angulo D E F, æqualis per 4. propos. At uero angulus A C B, mi-*



16. primi. *nor eſt angulo D F E, cum angulus D F E maior ſit angulo D G F, externus interno, & oppoſito; & angulus D G F, æqualis ſit angulo A C B. In tertia denique figura angulus A B C, maior quidem eſt angulo D E F propterea quòd angulus D E G, (æqualis exiſtens per* 9. pron. *4. propos. angulo A B C,) maior ſit eodem angulo D E F, totum parte: Sed angulus A C B, minor eſt angulo D F E. Nam ſi recta E F, producatur ſecans rectam D G, in K, fiet angulus*



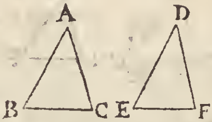
16. primi *D F E, maior angulo D K E, externus interno; Eſt autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & oppoſito. Multo igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. æqualis eſt angulo A C B. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero ſit maior, modo minor, & modo æqualis.*

25.
THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, baſin vero baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus

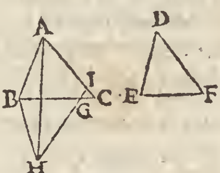
duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, utrumque utrique, hoc eſt, A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; Baſis autem B C, maior ſit baſe E F. Dico angulum A, maiorem eſſe angulo D. Si enim non eſt angulus A maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus lateribus circa D, utrumque utrique, per hypotheſin; erit & baſis B C, æqualis baſi E F; quod eſt abſurdum; *4.primi.* Ponitur enim baſis B C, baſe E F, maior: Si uero angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis E F, maior baſi B C; *24.primi* quod magis eſt abſurdum, cum E F, ponatur eſſe minor quam B C. Quare cum angulus A neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLION.

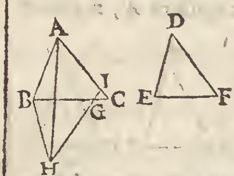
THEOREMA *hoc conuerſum eſt præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonſtratum eſt baſin illi reſpondentem, eſſe maiorem: In hoc autem ex maiori baſi oſtenſum fuit angulũ illi reſpondentem, maiorem eſſe. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata ſunt in propoſ. 18, & 19. Nam in 19 demonſtratum eſt, in uno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus reſpondere: At in 24. idem oſtenſum fuit in duobus diuerſis triangulis, quorum duo latera unius æqualia ſunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; diſcrimen reperies inter propoſ. 18. & 25.*

MENELAVS *Alexandrinus, ut ait Proclus, demonſtrat hoc idẽ theorema oſtenſiue, hac ratione. Poſitis eiſdem triangulis, ex baſe maiore B C, abſcindatur recta B G, æqualis baſi minori E F.* *3.primi.* *Fiat quoque angulus G B H æqualis angulo D E F,* *23.primi.* *& ſit BH, æqualis ipſi B A,* *3.primi.* *atque adeo ipſi D E,*



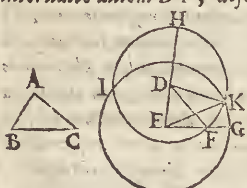
duca-

ducaturq́; recta per G, ex H, ſecans A C, in I. Quoniã igitur
5. primi duo latera B A, B H, æqualia ſunt, erunt anguli B A H,



B H A, æquales. Rurſus quia la-
tera B G, B H, æqualia ſunt lateri-
bus E F, E D, vtrumque vtrique;
& angulus G B H, æqualis angulo
D E F, per conſtructionem; erit ba-
4. primi ſis H G, baſi D F, atque adeo ipſi
A C, æqualis, angulusque G H B,
angulo E D F. Et quoniam recta H I, maior eſt quam H G,
quæ eſt æqualis ipſi A C, erit quoque maior H I, quam A C;
9. pron. Sed A C, maior eſt adhuc, quam A I; Multo ergo maior erit
8. primi H I, quam A I. Quare angulus I A H, maior erit angulo
I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui
4. pron. oſtenſi ſunt æquales, fiet totus angulus B A C, toto angulo
B H G, maior: Sed angulus B H G, demonſtratus fuit æqua
lis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angu-
lo D, quod eſt propoſitum.

Heron autem idem ex eodem Proclo hoc modo demon-
ſtrat. Poſitis eiſdem triangulis, producatur baſis minor E F,
3. primi ad G, ut ſit E G, æqualis baſi maiori B C. Deinde centro D,
interuallo autem D F, deſcribatur circulus, producaturque



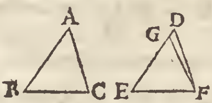
E D, ad H, in circunferentiam.
15. def. Quoniam igitur D H, eſt æqualis
2. pron. ipſi D F, erit quoque D H, æqua-
lis ipſi A C. Additis igitur æqua-
libus D E, A B, fient A C, A B,
ſimul æquales toti H E: Sed A C,
20. prim. A B, ſimul maiores ſunt quam
B C, atque adeo quam E G; Igi
tur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus deſcriptus
ex centro E, & interuallo E G, interſecabit rectam E H atque
adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad
K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera
A B, A C, æqualia ſunt duobus lateribus D E, D K, utrumq;
vtrique, (eſt enim D K æquale ipſi D F, per definitionem cir
culi; D F, autem poſitum eſt æquale lateri A C.) & baſis B C,
baſi E K, æqualis; (cum E K æqualis ſit ipſi E G, per defini-
tionem circuli; E G, vero recta per conſtructionem facta ſit
æqualis

æqualis baſi B C.) Erit angulus B A C; angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior eſt angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior exiſtet. Quod eſt propoſitum. 8. primi 9. pron.

THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

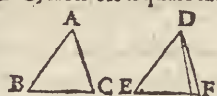
SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, uterque vtrique, hoc eſt B, ipſi E, & C, ipſi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia eſſe, vtrumque vtrique, hoc eſt A B, ipſi D E & A C, ipſi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non eſt æquale lateri D E, ſit D E, maius; a quo abſcindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. 3. primi Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia ſunt lateribus G E, E F, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypotheſin; Erit angulus C, æqualis angulo E F G. 4 primi Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D; Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod eſt abſurdum. Non eſt igitur latus A B, inæquale lateri D E, ſed æquale. Quamobrem, cum



cũ latera A B, B C æqualia ſint lateribus D E, E F, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; erunt & baſes
4. primi A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod eſt propoſitum.

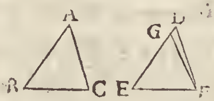
SINT ſecundo latera A B, D E, ſubtendentia æquales angulos C, & B F D, inter ſe æqualia. Dico rurſus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, eſſe æqualia, utrumque vtrique, hoc eſt, B C, ipſi E F, & C A, ipſi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non eſt æquale lateri E F, ſit E F, maius; ex quo ſu-
3. primi matur recta E G, æqualis ipſi B C,



ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia ſunt lateribus D E, E G, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E,
4. primi æquales, per hypotheſin; Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & oppoſito, quod eſt abſurdum.
16. primi Eſt enim maior. Non ergo eſt latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur inſtitutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

PRIOR huius theorematis pars conuerſa eſt 4. propoſitionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipſis contentorum, collecta fuit æqualitas baſium, & angulorum ſuper baſes. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate baſium B C, E F, & angulorum ſuper has baſes, demonſtratũ eſt, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus alterius, æqualia eſſe, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonſtrauimus ad propoſitionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus

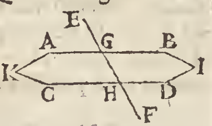


THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 27. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erũt inter ſe illæ rectæ lineæ.

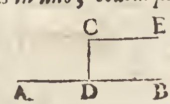
In duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter ſe æquales. Dico lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, coibunt tandem, ſi producantur infinite. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum eſt G I H, (cum A B, recta continuata ſit, item recta C D, uſque ad punctum I,) & angulus A G H, poſitus eſt æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & oppoſito D H G;



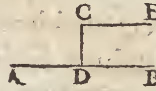
quod eſt abſurdum; quoniam externus interno maior eſt. 16. primi Quod ſi A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rurſus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & oppoſito A G H. quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D; Quare parallelæ erũt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonſtrabitur, lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

NECESSE eſt, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem exiſtant plano, ut ex definitione conſtat: Quare non ſatis eſt duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, ut duæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in uno, eodemque exiſtere plano. Fieri enim poteſt, ut linea recta incidẽs in duas rectas nõ in eodẽ plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim CD, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; &



ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito perſpicuum eſt, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum ſint recti; & tamen C E, A B, non ſunt parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem; in eodem plano exiſtentes: ſicut neque in ſubſequentibus; quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, ut ſupra diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſario in eodem plano exiſtere. In vndecimo vero libro & alijs, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis; quia in illis libris diſſeritur de ſolidis, in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas, & ſuperficies, &c.

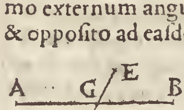


28. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erũt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniã angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C, & eidẽ angulo E G A, æqualis eſt angulus H G B; erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales: Quare lineæ A B C D, parallelæ erunt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

15. primi
1. pron.
27. primi



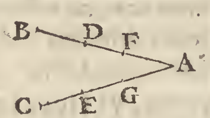
SECVN-

SECVNDO faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rurſus, rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & oppoſito ad eaſdem partes, æqualis. Quare vt iam oſtenſum eſt, erunt rectæ A B, C D, parallelę. Idem oſtendetur, ſi duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonſtrandum. 13. *primi.*

SCHOLION.

IAMDVDVM pronunciatum vndecimum a principiorum numero reiecimus. Cum igitur ſequens propoſitio 29. illi innitatur, ita vt abſq; eo demonſtrari non poſſit, neceſſe eſt, vt illud ex hactenus demonſtratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, vt antea polliciti ſumus. Hoc autem facile præſtabimus, ſi prius duo explicemus, quorum primum hoc ſit.

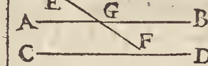
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT a puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter ſe diſtant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quã D, & E, & ita deinceps, ſi producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perſpicuum eſt, extrema earum puncta infinito ſpatio inter ſe diſtare, ſi infinite ipſæ producantur. Si enim non infinito ſpatio diſtarent, augeri poſſet eorum diſtantia; igitur & lineæ ipſæ

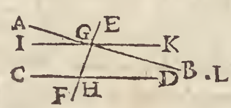
ultra produci, quod eſt abſurdum cum ponantur infinite iam eſſe productæ. Quare ſi dictæ lineæ A B, A C. producantur infinite, ipſarum diſtantia excedet omnem finitam diſtantiam.
tex. 35. *Hoc pronunciato vſus eſt & Ariſtoteles lib. 1. de cælo, vbi demonſtrauit, mundum non eſſe infinitum. Secundum, quod debet explicari, ita ſe habet.*

SI duarum parallelarum rectarum linearũ alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoq; productam ſecabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta EF, ſecet ipsã A B, in G. Dico rectam E F ſi producatur ſecturam eſſe quoq; ipſam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G angulum faciunt, ſi producantur infinite, excedunt omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallela A B a parallela C D, diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia G B, a G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam G F, productam ſecuiſſe rectam C D. Nam quandiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori diſtantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt conſtat. His igitur ita expoſitis, facile demonſtrabitur hoc theorema, quod eſt apud Euclidem, vndecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.



IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico re-

co rectas A B, CD, coire ad eaſdem partes B, & D. Quoniam duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur eſſe duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo D H G remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, conſtituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K. ſupra G B, ſecabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & oppoſito K G H; Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipſam I K, in G; Producta igitur ſecabit quoque ipſam C D, vt demonſtratum eſt. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod eſt propoſitum. 13. primi. 5. pron. 23. primi. 28. primi.

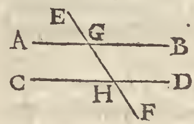
QVAMVIS *autem optime a Proclo demonſtratum ſit vndecimum hoc pronunciatum, vt iure inter theoremata poſſit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propoſitionibus, quarum demonſtrationes ex ipſo pendent, tanquam pronunciato, præſertim cum facile ei aſſenſus præberi queat, intellecta prius recte propoſitione 28. Si enim lineæ rectæ propoſitæ parallelæ ſunt, ita vt nũquam coeant, ſed ſemper æquali inter ſe diſtantia progrediantur, etiamſi infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad eaſdem partes duobus rectis æquales, vt demonſtratum fuit; quis non videt, ſi eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos ad eaſdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas ſunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem æquali diſtantia procederent, ſi ijdem anguli paulo maiores eſſent, duobus videlicet rectis æquales, vt hæc propoſitio 28. demonſtrauit?* 28. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidẽs linea; Et alternatim angulos inter ſe æqua-

les efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primũ, angulos alternos A G H, D H G, inter ſe eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit alter, nempe A G H, maior. Quoniam



igitur angulus A G H, maior eſt angulo D H G, ſi addatur communis angulus B G H, erunt duo A G H, E G H, maiores duobus D H G, E G H: At duo A G H, B G H, æquales ſunt duobus rectis; Igitur duo D H G, B G H, minores ſunt duobus rectis. Quare cum ſint interni, & ad eaſdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes. quod eſt abſurdum, cum ponantur eſſe parallelæ. Non eſt igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neq; minor; Eadem enim ratione oſtenderetur rectas coire ad partes A, & C: Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eadẽq; eſt ratio de angulis alternis B G H, C H G.

4. pron. *13. primi.* *11. pron.*

Dico ſecundo, angulum externum A G E, ęqualem eſſe interno, & ad eaſdem partes oppoſito C H G. Quoniam angulo B G H, æqualis eſt alternus C H G, vt oſtenſum eſt; & eidem B G H, æqualis eſt angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, inter ſe quoq; æquales. Eodem modo demonſtrabitur, angulum B G E, æqualem eſſe angulo D H G.

15. primi. *1. pron.*

Dico tertio, angulos internos ad eaſdem partes, A G H, C H G, æquales eſſe duobus rectis. Quoniã oſtenſum fuit, angulum externum A G E, æqualem eſſe angulo C H G, interno; ſi addatur communis A G H, erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: ſed duo A G E, A G H, æquales ſunt duobus rectis; Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alter-

2. pron. *13. primi.*

& alternatim angulos &c. Quod erat demonſtrandum.

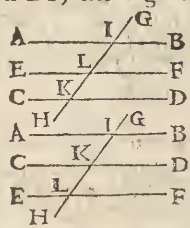
SCHOLION.

CONVERTIT autem hoc præſens theorema duo præcedentia theoremata, vt perſpicuum eſt.

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

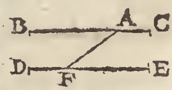
SINT rectę A B, C D, eidem rectæ E F, parallelę; Dico & ipſas A B, C D, eſſe inter ſe parallelas. Quoniam omnes hæ lineę in eodem ponuntur eſſe plano, (Nam propoſ. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuerſis planis) ducatur recta G H, ſecans A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipſi E F, erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. *29.primi.* Rurſus quia C D, ponitur etiam parallela ipſi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. *29.prim.* Quare anguli A I L, D K I, æquales *1.pron.* inter ſe quoq; erunt. Cum igitur ſint alterni, erunt rectæ A B, C D, parallelę inter ſe. *27.primi.* Quæ igitur eidem rectę lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLION.

QVOD ſi quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas eſſe rectæ C D, & tamen ipſas non eſſe parallelas; Occurrendũ eſt, duas A I, B I, non eſſe duas lineas, ſed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim eſt animo, quaslibet parallelas infinite eſſe productas; Cõſtat aũt A I, productã coincidere cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, &

inter ſe ſunt parallelæ; Vel certe vnam, & eandem lineam conſtituunt, quando inter ſe coeunt. Quod ita demonſtrabitur. Sint duæ rectæ A B, A C, *coeuntes in* A, *parallelæ ipſi* D E. *Dico illas in rectum eſſe conſtitutas. Ex puncto enim* A, *ducatur recta* A F, *ſecans* D E, *in* F, *vtcunq;. Quoniam igitur* A B, D E,



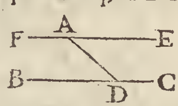
29.primi. *ſunt parallelæ, erũt anguli alterni* B A F, A F E, *æquales; Addito ergo communi angulo* C A F, *erunt duo*
2. pron. *anguli ad* A, *æquales duobus angulis* C A F, A F E. *Sed hi duo*
29.primi. *æquales ſunt duobus rectis cũ ſint interni inter duas parallelas; Igitũ & duo anguli ad* A, *duobus erũt rectis æquales; ac propterea*
14.primi. *in rectũ erũt cõſtitutæ ipſæ* A B, A C. *Qđ eſt propoſitũ.*

31.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda ſit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq; faciens angulum
23.primi. quemcunq; A D B; Cui ad A, æqualis conſtituatur E A D. Dico igitur rectã E A, extenſam ad F, quantumlibet, parallelam eſſe ipſi B C. Cum enim anguli alterni A D B, D A E, æquales ſint, per conſtructionẽ; Erunt



27.primi. rectæ B C, E F, parallelæ. A dato, igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

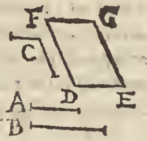
DEBET autem punctum datum in tali eſſe loco ſitum extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipſa conſtructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda eſt linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non poſſet, ſi punctum in directum iaceret cum ipſa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt oſtendimus propoſ. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quã vna, duci nequeunt. Si.n. duæ ducerent, cõuenirẽt

ipſæ

ipſæ in puncto eodem, quod eſt abſurdum, cum ſint parallelæ.

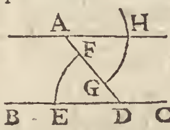
EX hoc porro problemate, & illo, quod propoſ. 23. continetur, facili negotio conſtituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq; angulũ illũ cõprehendenti a datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatq; conſtituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ rectæ A, ſit æqualis, fiat angulus E D F, angulo C, & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, agatur recta E G, ipſi D F, parallela, & per F, recta F G, ipſi D E, parallela ſecans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela ſunt, ex conſtructione; parallelogrammũ erit D E G F. Quod cũ ex cõſtructione, habeat angulũ D, angulo dato C, æqualẽ, & latera D E, D F, circa dictũ angulũ D, datis rectis A, B, æqualia; factũ erit, qđ proponitur.

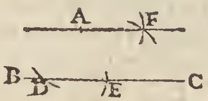


PRAXIS.

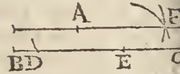
SIT ducenda parallela ipſi B C per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunq; ad B C & ex D & A ad idẽ interuallũ quodlibet deſcribãtur duo arcus ad diuerſas partes; vnꝰ ad partes B alter ad partes C: Deinde officio circini arcui E F, abſcindatur ex arcu altero arcus G H, æqualis. Si igitur ex A, p H, recta ducatur, erit hac parallela ipſi B C. Nã anguli E D F, H A G ſunt æquales, vt conſtat ex praxi propoſ. 23. &c. 27. primi.



ALIO modo ducẽ per idẽ punctũ A, datũ lineæ parallela lineæ datæ BC hac arte. Ex cẽtro A, ad quoduis interuallũ deſcribatur arcus ſecãs B C in pũcto D; & eodẽ interuallo ex D ſumatur punctũ E, in eadẽ recta B C: Deinde eodẽ interuallo ex A, & E, deſcribantur duo arcus duo arcus ſecantes ſe ſe in F. Nã ducta recta A F, erit parallela rectæ BC. Quoniã propter idẽ interuallum aſſumptũ recta A F æqualis eſt rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, ſi ducerentur hæ lineæ; erit A F, oppoſitæ D E, parallela, vt po



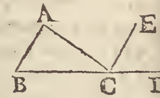
vt poſtea demonſtrabimus propoſ. 34. Quod ſi punctum A, vicinum fuerit rectæ B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, ſumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiuſdem rectæ B C, nempe E, quod tamen aliquantulum diſtet a puncto D. (*Quo enim maior fuerit diſtantia inter* D, *&* E, *eo rectius parallela ducetur*) *Eodem interuallo arcus deſcribatur ad partes A :* Deinde ex *A, interuallo* D E *alter arcus deſcriptus ſecet priorem arcum in F. Recta igitur ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius ; quia recta A F, æqualis eſt rectæ* D E, *ob idem interuallum ; & recta A* D, *rectæ E F, ſi hæ rectæ ductæ eſſent, &c.*



32. THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto : Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A, & B. Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectę A B. (31. primi.)



Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, erunt anguli alterni A, & A C E, æquales. (29. primi.) Rurſus, quia recta B D, in eaſdem parallelas incidit, erit angulus externus D C E, æqualis interno B; (29. primi.) Additis igitur æqualibus A C E, & A, fiet totus A C D, (2. pron.) (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B æqualis. Quod eſt propoſitum.

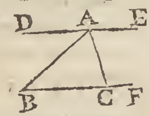
DICO ſecundo, tres angulos internos eiuſdem trianguli A, B, & A C B, duobus eſſe rectis æquales. Cũ enim exter-

externus angulus A C D, ut oſtenſum fuit, æqualis ſit duo
bus internis A, & B; ſi addatur communis A C B; erunt
duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: 2. *pron.*
Sed duo A C D, A C B, ęquales ſunt duobus rectis; Igitur 13. *primi.*
& tres interni A, B, A C B, duobus ſunt rectis æquales.
Quare cuiuſcunque trianguli uno latere producto, &c.
Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

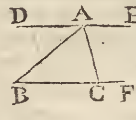
Cum demonſtratum ſit propoſ. 16. angulum externum cuiuſuis trianguli maiorem eſſe utrolibet interno, & oppoſito; Hic autem, eundem externum eiſdem internis eſſe æqualem; perſpicuum eſt, alterutrum internorum, & oppoſitorum ſuperari ab externo, reliquo interno angulo. Vt in triangulo propoſito angulus A, ſuperatur ab angulo A C D, angulo B; Et angulus B, ſuperatur ab eodem angulo A C D, angulo A, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, eſt æqualis. Rurſum, quia demonſtratum eſt propoſ. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli, quomodocunq; ſumptos, duobus eſſe rectis minores; Hic vero omnes tres duobus rectis æquales eſſe; manifeſtum eſt, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt, angulo A C B, &c.

Omne porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonſtrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, ducatur rectæ B C parallela D E. Quoniam igitur 31. *primi.*
anguli alterni D A B, & A B C, æquales 29. *primi.*
ſunt; ſi addantur æquales E A C & A C B, (ſunt enim & hi alterni) erunt duo anguli 2. *pron.*
D A B, E A C, duobus A B C, A C B æquales. Addito ergo communi angulo B A C, erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales ſunt duobus rectis, vt conſtat ex propoſ. 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus ſunt rectis æquales. quod eſt propoſitum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, ſi latus B C, ſit protra-



ctum

ctũ, æqualẽ eſſe duobus internis, & oppoſitis ABC, BAC. Quoniam anguli ABC, BAC, ACB, æquales ſunt duobus re-
13. primi. *ctis, vt oſtenſum fuit; Sunt autem, & anguli ACF, ACB,*



duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB,
3. pron. *remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.*

Facile etiam conuerti poterit prima pars propoſitionis Euclidis: Hoc eſt, ſi ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis ſit duobus internis, & oppoſitis, illam lineam eſſe in directum ipſi lateri conſtitutam. Ex C, enim ducatur CF, recta ſitq́; angulus ACF, æqualis duobus angulis ABC, BAC: Dico, rectas BC, CF, in directum iacere. Cũ.n. angulus ACF, æqualis ſit angulis ABC, BAC; ſi addatur communis angulus ACB, erunt anguli
2. pron. *ACF ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC,*
32. primi. *BAC, ACB, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & anguli ACF, ACB; duobus erunt rectis æquales. Quare BC, CF,*
14. primi. *vnam lineam rectam conſtituunt.*

QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ.

Dvobvs modis ex hac propoſ. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic eſt.

Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

Hoc eſt, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis vni recto, id eſt, duobus rectis; Anguli vero ſecundæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autẽ tertiæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis tri-

bis tribus rectis, ſex videlicet rectis; Et ſic de reliquis. Eum autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, ſeu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ ſuperficiem non concludunt, unde neq; figuram conſtituunt, ſed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ conſtitutionem requiruntur; Atq; ita triangulum, quia habet tria latera, totidemq; angulos, erit prima inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus relinquitur vnum; Sic erit figura habens 20. latera ſeu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius ſubtractus a 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris eſt habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum ſit decima octaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictũ eſt. Ita quoq; omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura ſit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonſtrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipſa eſt inter figuras, ſeu quot ipſa habet angulos laterave, binario dempto. Nam a quouis angulo ipſius ad omnes angulos oppoſitos duci poſſunt lineæ rectæ, & ſolum ad duos propinquos angulos non poſſunt duci: Quare in tot triangula diſtribuetur, quot ipſa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non poſſe diuidi in alia triangula; quadrãgulum vero in duo ſecari; quin-



quangulum in tria; ſexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horũ triangulorũ conſtituãt oẽs angulos rectilineæ figuræ propoſitæ, & oẽs anguli cuiuslibet triãguli æquales ſint duobus rectis; perſpicuũ eſt omnes angulos figuræ cuiuſuis rectilineæ æquales eſſe bis tot rectis, in quot triãgula diuiditur, hoc eſt, quota ipſa eſt inter rectilineas figuras; Quod quidem maniſeſte perſpicitur in propoſitis figuris. 32. primi.

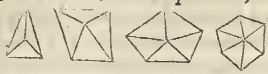
Secundus modus, quo ſcitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, dem-

ptis

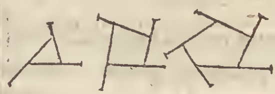
ptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.

Hoc eſt, anguli cuiuslibet trianguli æquales ſunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis: Ita etiã anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.



Demonſtratio autẽ huius rei talis eſt. Si ab aliquo puncto intra figurã aſſumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, anguloſue, figura ipſa continet: Cum igitur an-
32. primi. *guli cuiuſcunq; trianguli æquales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt: At anguli circa punctum intra figuram aſſumptum non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propoſitæ, vt conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui anguli conſtituentes angulos figuræ propoſitæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum aſſumptum, quot latera, vel angulos continet figura: Sunt autem illi anguli circa dictũ punctũ æquales 4. rectis, vt collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cuiuſq; figuræ bis tot rectis ſunt æquales, ablatis quatuor quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera. quod eſt propoſitum.*

Ex hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur verſus eandem partem, omnes angulos externos æquales eſſe quatuor rectis. Nam quili-
13. primi. *bet externus, & illi deinceps internus, æquantur cũ duobꝰ rectis, atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, anguloſue figura continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonſtrauimus: Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni, & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt.*



Exemplum In triangulo quouis, anguli interni & externi ſimul æquales ſunt ſex rectis; Cum igitur interni duobus ſint

bus ſint rectis æquales, erunt ſoli externi æquales quatuor rectis. In quadrilatero, anguli externi, & interni ſimul æquales ſunt octo rectis: Cum igitur interni ſoli æquales ſint quatuor rectis, erunt & ſoli externi quatuor rectis æquales. In pentagono, ſeu quinquangulo, anguli interni, & externi ſunt æquales 10. rectis; quoniam vero interni adæquantur ſex rectis, remanebunt externi æquales quatuor rectis. Quæ omnia in appoſitis figuris conſpiciuntur; Eademq; eſt ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

Si pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra coeant; efficientur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis.



In pentagono A B C D E, latera in vtrāq; partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K. æquales eſſe duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, ſit protractum ad F, erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis: Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinq; angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & quinq; anguli F, G, H, I, K, duobus ſunt rectis æquales. Quod eſt propoſitum.

32. primi.
2. pron.
32. primi.

COROLLARIVM. I.

Ex hac propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſq; alterius trianguli ſimul ſumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, æquales ſunt duobus angulis rectis. Vnde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq; erunt ipſa triangula.

3. pron.

COR-

COROLLARIVM. II.

Constat etiam in omni triangulo Iſoſcele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehenſus rectus fuerit, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum; Nam reliqui duo ſimul conficient vnum rectum. Quod ſi angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtuſus, quemlibet aliorum eſſe ſemirecto minorem; Reliqui enim duo ſimul minores erunt vno recto. Si deniq; dictus angulus extiterit acutus, vtrumq; reliquorum maiorem eſſe ſemirecto; Quoniam reliqui duo ſimul maiores erunt vno recto.

COROLLARIVM. III.

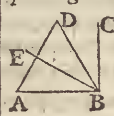
Perspicuum quoq; eſt, quemuis angulum trianguli æquilateri eſſe duas tertias partes vnius recti; Vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, quibus æquales ſunt tres anguli trianguli æquilateri, diuiſi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

COROLLARIVM. IIII.

Liquet etiam, ſi ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppoſitum ducatur, conſtitui duo triangula ſcalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum, prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum ſcilicet, qui eſt & angulus trianguli æquilateri; reliquum deniq; tertiam partem vnius recti.

SCHOLION.

Porro ex tertio corollario depromi poteſt methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B,



1.primi. *conſtituatur triangulum æquilaterum A B D. Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiuſdem recti. Di-*

9.primi. *uiſo igitur angulo A B D, bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuiſus eſt in tres angulos æquales. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungũt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam
igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, erunt anguli al-
terni B A D, C D A, æquales; Quare cum duo latera B A, 29.*primi.*
A D, trianguli B A D, æqualia ſint duobus lateribus C D,
D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;, & anguli quoq; di-
ctis lateribus incluſi ęquales; erunt baſes B D, A C, æquales, 4 *primi.*
& angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi
anguli ſint alterni inter rectas A C, B D, erunt A C, B D, 27.*primi.*
parallelæ: Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales.
Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c.
Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

DIXIT *Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D; Item ad B & C, neque coniungentes eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuò ſe mutuò ſecarent; neq; eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.*

THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex

aduerſo

aduerſo & latera, & anguli; atq; illa bifariã ſecat diamteer.

Sit parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita A B, D C, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita A D, B C: Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non angulos oppoſitos D A B, & D C B: Deniq; ducta diametro A C, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cum enim A B, D C, ſint parallelę, erunt anguli alterni



29. primi. B A C, D C A, ęquales. Ruꝛſ⁹ q̃a A D, B C, ſunt parallelę, erũt & anguli alterni B C A,
29. primi. D A C, æquales. Itaq; cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterq; vtriq; ; & latus A C, dictis angulis adiacens commune vtriq; triangulo; erit
26. primi. recta A B, æqualis oppoſitæ rectę D C, & recta B C, oppoſitæ rectę A D. quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, ęqualis. Et quia ſi ęqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli B C A,
2. pron. D A C, toti quoq; anguli B A D, B C D, fiunt ęquales; conſtat ſecundum, angulos nimirum oppoſitos eſſe æquales. Quoniam vero duo latera A B, B C, trianguli A B C æqualia ſunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq; ; & angulus B, angulo D, ęqualis, vt iam
4. primi. oſtendimus; erunt triangula A B C, C D A, ęqualia, ideoq; parallelogrammũ A B C D, diuiſum bifariam a diametro A C, quod tertio proponebatur. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum ęqualia ſunt inter ſe, quę ex aduerſo &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

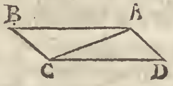
Apposite dixit Euclides, ſolummodo parallelogrammum a diametro diuidi biſariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat, anguli etiam bifariam diuiduntur a diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perſpicua erũt, ſi prius oſtenderimus, quatuor haſce figuras, Quadratum,

Altera

Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma. Hoc autem demonſtrabimus tribus ſequentibus theorematibus, quorum primum eſt.

OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera oppoſita A B, D C, æqualia; Item oppoſita latera A D, B C. Dico A B C D, eſſe parallelogrammum; hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & baſis A C, communis; igitur erit angulus B, angulo D, æqualis. Rurſus quia latera A B, 8. primi



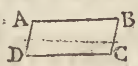
B C, æqualia ſunt lateribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli B, D, oſtenſi æquales; erit angulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, & angulus B C A alterno angulo 4. primi
D A C. Quare erunt A B & D C, parallelæ; Item A D, 27. primi
& B C, quod eſt propoſitum.

HINC conſtat, Rhombum, & Rhomboidẽ eſſe parallelogramma; quoniam oppoſita eorum latera ſunt inter ſe æqualia, ut manifeſtum eſt ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera oppoſita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter ſe æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propoſitionis 34 ut patet.

Secundum theorema tale eſt.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.

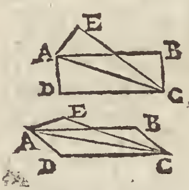
SINT in quadrilatero A B C D, anguli oppoſiti A, & C, æquales; Item oppoſiti anguli B, & D. Dico A B C D, eſſe parallelogrammum; hoc eſt, lineas AB, DC eſſe parallelas; Itemq; lineas A D, B C.



Nam ſi æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D; erunt duo anguli A, & B, duobus 2. pron.
angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales ſint quatuor rectis, ut ad propoſ. 32. demon-

ſtrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare
28. primi A D, B C, parallelæ ſunt. Eadẽ ratione erunt A B, D C, paral
lelæ. Erunt.n.duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, et
C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiã manifeſtum
eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrãmum, cum eius anguli oppo
ſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & al-
tera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æqua-
les, cum ſint recti, ex eorum definitionibus.

Hoc theorema conuertit ſecundam partem propoſitionis
34. ut conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam
& trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt a diametro, & ta-
men non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte lon-
gius, uel Rhomboides A B C D, quod pa-
rallelogrammum eſſe oſtenſum eſt; in quo
ducta diametro A C, conſtituatur ſuper
A C, triangulo A B C, æquale triangulũ
A E C, inuerſo ordine, ita ut latus C E,
ſit æquale lateri A B; & A E, ipſi C B,
fiatq; trapezium A E C D. Quoniã vero
triãgulũ A B C, triãgulo A D C, æquale eſt,



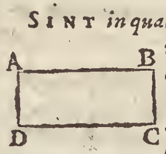
34. primi quod diameter A C, bifariã ſecet parallelogrãmũ D B: Erit et
triangulũ A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde tra-
pezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.

Qvod ſi quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab
utraque diametro, illud parallelogrammum erit, ut oſtendemus
ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema huiuſmodi eſt.

**Omne quadrilaterum habens omnes angu
los rectos, eſt parallelogrammum.**

Sint in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli
recti; Dico ipſum eſſe parallelogrammum;
hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas;
Itemque A D, B C. Quoniam duo anguli
A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cum
28. primi ſint duo recti; erunt A D, B C, parallelæ:

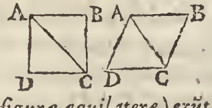


Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D,
parallelogrammum, quod eſt propoſitum.

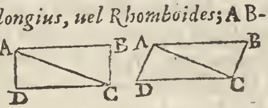
Hinc rurſum conſtat, Quadratũ, & Altera parte lon-
gius

gius, eſſe parallelogramma, cum eorum anguli omnes exiſtant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

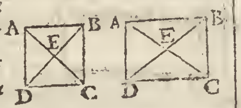
His in hunc modum demonſtratis, Quadratum ſcilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem eſſe parallelogramma, facile oſtendemus angulos Quadrati, & Rhombi, biſariam ſecari a diametro; Angulos uero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non biſariam, ut paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, uel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniã igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia ſunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumque utrique, & baſis B C, baſi D C; (ſunt enim hæ figuræ æquilateræ) erũt anguli B A C, D A C, æquales; Quare angulus B A D, diuiditur biſariam. Eodem modo demonſtrabimus, reliquos angulos biſariam ſecari a diametro. 8. primi



Sit rurſus, Altera parte longius, uel Rhomboides; A B C D, in quo diameter A C, ſitq́; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius eſt latere B C, erit angulus B C A, maior angulo B A C: Eſt autem angulus B C A, æqualis angulo D A C, alterno; quod B C, A D parallelæ ſint. (Eſt enim ABCD, oſtenſum eſſe parallelogrammũ.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur a diametro A C. Eadem eſt ratio aliorum angulorum. Quamobrem appoſite Euclides in tertia parte huius propoſitionis dixit, ſolum parallelogramma biſariam a diametro ſecari, non autem & angulos. 18. primi 29. primi



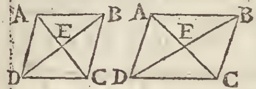
Eodem fere pacto oſtendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte lõgiore æquales eſſe; At uero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorẽ quidem eam quæ angulos acutos, minorem uero eam, quæ obtuſos angulos diſpertit. Sit.n. quadratũ, uel altera parte lõgius A B C D, in quo diametri AC, BD, quas dico eſſe æquales. Cũ n. duo latera A B, B C, triãguli ABC, æqualia ſint duobus laterib⁹ AB, AD triãguli BAD,



B A D, *utrumque utrique, & angulus* A B C, *angulo* B A D, *quia uterqe rectus; Erit baſis* A C, *baſi* B D, *æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales ſunt.*

4. primi

S I T *rurſus Rhombus, vel Rhomboides,* A B C D, *in quo diametri* A C, B D; *ſitq; angulus* B A D, *maior;* A B C, *minor. Non enim æquales ſunt, quia alias uterque eſſet rectus, cum ambo æquales ſint duobus rectis; quod eſt abſurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum* B D, *maiorem eſſe diametro* A C. *Quoniam duo latera* A B, A D, *trianguli* B A D, *æqualia ſunt duobus lateribus* A B, B C, *trianguli* A B C, *vtrumque vtrique, & angulus* B A D, *angulo* A B C, *maior exiſtit; erit baſis* B D, *maior baſe* A C. *quod eſt propoſitum. Ex quo manifeſtum eſt, cur in propoſitione* 33. *Euclides aſſeruerit, eas tantum lineas quæ coniungunt parallelas æquales ad eaſdem partes, æquales eſſe, ut ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ* A C, B D, *inæquales ſunt, licet coniungant parallelas* A B, D C, *quia non ad eaſdem partes ipſas coniungunt, ut perſpicuum eſt.*



29. primi

24. primi

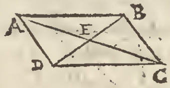
I N *omni tamen parallelogrammo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli* E A D, E D A, *trianguli* A E D, *æquales ſint alternis angulis* E C B, E B C, *trianguli* B E C, *uterque vtrique; & latus* A D *æquale lateri* B C, *oppoſito; Erit, &* A E *recta rectæ* C E, *& recta* D E, *rectæ* B F, *æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto* E.

29. primi
34. primi
26. primi

H V I V S *autem, quod modo diximus, conuerſum etiam demonſtrabimus, nimirum.*

O M N E quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariã diuidunt, parallelogrammũ eſt.

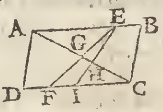
I N *quadrilatero enim* A B C D, *diametri* A C B D, *ſe mutuo bifariam diuidant in* E. *Dico* A B C D, *parallelogrãmum eſſe. Cum enim latera* A E, E B *trianguli* A E B, *æqualia ſint lateribus* C E, E D, *trianguli* C E D; *& anguli contenti*



tenti ad uerticem E, *æquales quoque:* 15 primi
Erunt & baſes A B C D *æquales, &* 4. primi
angulus A B E, *angulo alterno* CDE,
æqualis. Quare rectæ A B, C D, *pa-* 27. primi
rallelæ ſunt. Eadem ratione paralle-
læ oſtendentur A D, C B. *Parallelogrãmum ergo eſt* ABCD.
H v c *quoque referri poteſt hoc theorema.*

R e c t a linea ſecans diametrum parallelogrammmi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariá quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam.

I n parallelogrammo A B C D, *diametrum* A C, *bifariã*
ſecet recta E F, *in puncto* G; *Dico parallelogrammum diuidi*
bifariam. Quoniam angulus E A G, *æqualis eſt angulo al-* 29. primi
terno F C G, *& angulus* E G A, *angulo* F G C, *Eſt autem &* 15. primi
latus A G, *lateri* C G, *æquale per hypotheſin; Erunt & late-*
ra E G, F G, *æqualia. Quare cum late-* 26. primi

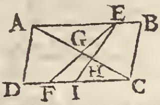


ra A G, G E, *æqualia ſint lateribus* CG,
G F, *& anguli quoque contenti æquales;*
erunt triangula A G E, C G F, *æqualia.* 4. primi
Addita igitur communi quantitate B C
G E, *erit triangulum* A B C, *trapezio* B C F E, *æquale; Sed* 2. pron.
triangulum A B C, *dimidium eſt parallelogrammi* A B C D, 34. primi
Igitur & trapezium B C F E, *dimidium erit eiuſdem paral-*
legrammi, ideoque recta E F. *parallelogramum bifariã ſecat.*

S e c e t iam E F, *parallelogrammum bifariam; Dico,*
& diametrum A C, *bifariam ſecari in* G. *Si enim non bifa-*
riam diuiditur in G, *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in* 10. primi
H, *per quod ducatur recta* E H I; *Eritque, vt iam demon-*
ſtrauimus, E I C B, *trapezium dimidium parallelogrammi*
A B C D, *atque adeo æquale trapezio* E F C B *quod etiam*
dimidium ponitur eiuſdem parallelogrammi, pars toti, quod
eſt abſurdum. Diuiditur igitur A C, *bifariam in* G, *& non*
in alio puncto. quod erat propoſitum.

H i n c facile colligitur, ſi in latere aliquo parallelogrã-
mi cuiuſque punctum ſignetur, vel etiam intra parallelogrã-

mũ, vel extra, quod tamẽ non ſit in diametro, niſi ipſum ſecet dia



metrũ bifariã; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, q̃ parallelogrãmũ bifariã ſecet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt ſi punctum ſit E, *in latere* A B, *ducenda eſt recta* E F, *per* G. *punctum, in quo diameter* A C, *bifariam diuiditur; & ſic de alijs punctis.*

DEMONSTRAT *quoque hic Peletarius problema non iniucundum. videlicet.*

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis.

DVAE *rectæ infinitæ* AB, AC, *contineant angulũ* BAC, *ſitq; data recta finita quæcunque* D, *& angulus datus* E, *hac lege, ut duo anguli* E, *&* B A C, *minores ſint duobus rectis:*



Oportet igitur inter rectas A B, A C, *collocare rectam æqualem quidem rectæ* D, *cũ alterutra uero illarum, nimirũ cum* A C, *facientem angulum æqualem angulo dato*
23.primi. E. *Fiat angulus* C A F, *æqualis angulo* E,
3.primi *& producta* F A, *ad* G, *ſit* A G, *æqualis rectæ* D; *& per* G,
31.primi *ducatur* G B, *parallela ipſi* A C, *ſecans* A B, *in* B: *Deinde*
per B, *ducatur* B C, *parallela ipſi* A G, *ſecans* A C, *in* C. *Di-*
co rectam B C, *collocatam inter rectas* A B, A C, *æqualem*
eſſe rectæ D, *angulumq;* B C A, *angulo* E. *Cum enim paralle-*
logrammum ſit, per conſtructionem, A C B G, *erit recta* BC,
34.primi. *rectæ* G A, *æqualis; At* G A, *æqualis eſt, per conſtructionẽ,*
32.primi *rectæ* D; *Igitur &* B C, *rectæ* D, *æqualis erit. Rurſus quia*
29.primi. *angulus* B C A, *angulo alterno* C A F, *æqualis eſt; & eidem*
angulo C A F, *æqualis eſt, per conſtructionem, angulus* E;
erunt anguli E, *&* B C A, *æquales. Quod eſt propoſitum.*

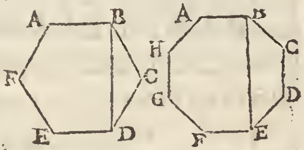
Cæterum

Cæterum ex conſtructione manifeſtum eſſe cuilibet poteſt, cur duo anguli dati minores eſſe debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulũ A B C, ſi anguli B A C, & B C A, æquales eſſent duobus rectis, vel maiores, ut conſtat ex propos. 17. uel 32.

EX PROCLO.

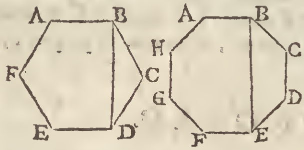
In omni figura rectilinea latera habens numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula; erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

Lᴀᴛᴇʀᴀ oppoſita dicuntur illa duo, quę ex utraque parte latera habent ęqualia numero; ut in hexagono A B C D E F, latera oppoſita erunt A B, E D; quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono uero A B C D E F G H, latera oppoſita erũt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in aliis figuris ęquilateris parium laterum, ex utraque parte oppoſitorum laterum, erunt tot latera, quot ſunt in dimidio



numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur duo quęlibet latera oppoſita eſſe parallela; A B, nimirum ipſi E D, in hexagono; & A B, ipſi F E, in octogono, & ſic de cęteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, ut in 32. propos. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni ęquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni ęquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur ęquales:
Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, 32. primi
duobus rectis ęquales; Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare parallelæ erunt A B, & E D. 28. primi
Rurſus quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis ęquales. Sunt autẽ quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis; Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis æquales, atq;
adeo AB, FE, parallelæ erũt. Eodẽ modo demõſtrabitur in oĩbus aliis 28. primi

figuris huiuſmodi angulos duos ad lineã rectã extrema oppoſitorũ laterum coniungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam



in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales ſunt ſex rectis; At quinque anguli decagoni æquales ſunt octo rectis: Ablatis igitur ſex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum, eadem linea abſcindet hexagonũ, cuius anguli ſunt octo rectis æquales; At ſex anguli totius figuræ æquales ſunt decem rectis; demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

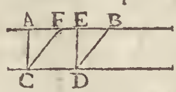
QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, ut oſtendimus; tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici conſueuit, proptereaque in definitionibus, Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

35.

THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INTER duas parallelas A B, C D, ſuper baſi C D, exiſtant duo parallelogramma C D E A, C D B F; (Dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, ut in exemplo propoſito cernitur.) Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad areã, ſeu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam



igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E æqualis eſt rectæ C D oppoſitæ; & eidem C D æqualis eſt F B, in parallelogrammo C D B F; Erunt A E, F B, inter ſe æquales:

34. primi

1. pron. F B, inter ſe æquales: Dempta igitur communi F E, remanebit A F, ipſi E B, æqualis: Eſt autem & A C, ipſi E D,

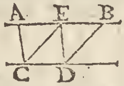
3. pron. *34. primi* æqualis in parallelogrammo C D E A, & angulus B E D,

29. primi angulo F A C, externus interno. Quare triangulũ F A C,

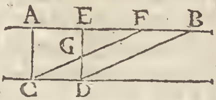
4. primi triangulo B E D, æquale erit: Addito igitur communi trapezio

pezio C D E F, fiet totum parallelogrãmum C D E A, toti parallelogrammo C D B F æquale. Quod eſt propoſitum. 2. pron.

Cadat ſecundo punctum F, in punctum E; Dico rurſus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia eſſe. Erunt enim ut prius, rectæ A E, E B, æquales, atque adeo triangula E A C, B E D, æqualia. Addito igitur cõmuni trian gulo C D E, fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia. 4 primi 2. pron.



Cadat tertio punctum F vltra E, ita vt recta C F, ſecet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ A E, F B, ſunt æquales; ſi communis addatur E F, erit tota A F, toti E B, æqualis, atque adeo triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo cõmuni triãgulo E G F, remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum. 2. pron. 4. primi 3. pron. 2. pron.

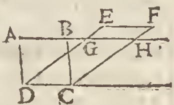


SCHOLION.

CONVERTEMVS *facile hanc propoſitionem, hoc modo.*

PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes cõſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

SINT *duo parallelogramma æqualia* A B C D, C D E F, *ſuper eandem baſin* C D, *& ad eaſdem partes. Dico rectam* A B *productam, in directũ iacere ipſi* E F, *& propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Alias enim* A B, *producta uel cadet infra* E F, *uel ſupra; Cadat primo infra, qualis eſt* A H. *Erit igitur parallelogrammum* C D G H, *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur autem* 35. primi



autem eidem parallelogrammo A B C D, *æquale parallelogrã-*
1. *pron.* *mum* C D E F; *Quare parallelogrãma* C D E F, CDGH, *æqualia erunt, totum, & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet* A B, *infra* E F.

C A D A T *ſecundo* A B, *producta ſupra* E F. *Cadet igitur*



F E, *protracta infra* A B: *Quare, ut prius erunt parallelogramma* A B C D. CDHG *æqualia, totum et pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdũ conſequeretur, ſi* C F, D E, *producerentur uſq; ad* A B, *protractam. Eademq; demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum* E, *ſit ultra* B, *ſiue non, ut perſpicuum eſt. Non ergo cadet* A B, *ſupra* E F; *ſed nec infra, ut demonſtratum eſt: ergo producta, in directum iacet ipſi* E F. *ac proinde parallelogramma* A B C D, C D E F, *in eiſdem ſunt parallelis.*

36.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

S I N T duo parallelogramma A C E F, G H D B, ſuper æquales baſes C E, H D, inter eaſdem parallelas A B, C D, Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarũ



C E. G B, ad eaſdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, & eidem H D, æqualis eſt G B. Erunt
34. *primi* C E, G B, æquales inter ſe; ſunt autem & parallelæ, per hy-
1 *pron.* potheſin: Quare & C G, E B, ipſas coniungentes parallelæ
33. *primi.* erunt, & æquales, ideoq; C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma A C E F, G C E B, ſint inter eaſdẽ parallelas, & ſuper eandem baſin C E, erit parallelogrammũ
35. *primi.* A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rurſus quia parallelogramma G C E B, G H D B, ſunt inter eaſdẽ parallelas, & ſuper eandem baſin G B, erit quoq; parallelogrãmum G H D B,

G H D B, eidem parallelogrammo G C E B, æquale. Quare & parallelogramma A C E F, G H D B, inter ſe æqualia erũt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod oſtendendum erat. *35. primi.* *1. pron.*

SCHOLION.

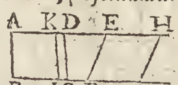
Conuerſum huius theorematis duplex eſt, ad hũc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia ſup baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

Sint primo duo parallelogramma æqualia A B C D, E F G H, *ſuper baſes æquales* B C, F G, *& ad eaſdem partes conſtituta; Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt,* A D, *protractam coire in directum cum* E H. *Nam alias cadet aut infra* E H, *aut ſupra. Quo poſito ſequitur, totum et partem eſſe æqualia, quẽadmodum in conuerſa præcedentis propoſitionis eſt dictum, & figura facile commonſtrat. Intelligendæ ſunt autem baſes æquales datæ in eadem linea recta* B G.



Sint ſecundo eadem parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas A H, B G. *Dico baſes* B C, F G, *eſſe æquales. Si enim altera, nempe* B C, *dicatur maior, abſcindatur*
B I, *æqualis rectæ* F G, *& ducatur* I K, *3. primi*
parallela ipſi C D: *Eritq; parallelogrã- 31. primi.*
mum A B I K, *æquale parallelogrammo 36. primi*
E F G H; *& ideo parallelogrammo* A B C D, *pars toti. quod eſt abſurdum. Non ergo* B C, *maior eſt, quam* F G. *Eadem ratione neque minor erit. Quare baſes* B C, F G, *æquales ſunt.*



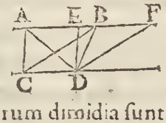
THEOR. 27. PROPOS. 37. 37.

TRIANGVLA ſuper eadẽ baſi cõſti-

tuta,

tuta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

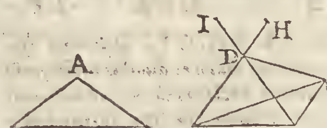
Inter parallelas A B, C D, & ſuper baſin C D, ſint conſtituta duo triangula A C D, B C D. (Dicitur autē triangulum inter duas eſſe parallelas conſtitutum, quando baſis eſt pars unius, & angulus oppoſitus alteram tangit.) Dico
31.primi. ea eſſe æqualia. Per D, enim ducatur D E, parallela rectæ



A C, & D F parallela rectæ B C. Erunt
35.primi igitur parallelogrāma A C D E, A C D F æqualia; Sunt enim ſuper eandem baſin C D, & inter eaſdem parallelas. Sed ho
34.primi rum dimidia ſunt triangula A C D B C D; quod A D. B D diametri biſariam ſecent parallelogramma A C D E, B C D F.
7. pron. Igitur & triangula A C D, B C D, æqualia erunt. Triangula igitur ſuper eadem baſi, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

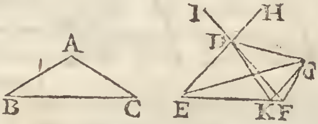
Conversa huius propoſitionis demonſtrabitur ab Euclide propos 39. Porro ex hac propoſitione facile cum Proclo demonſtrabimus, Triangula quorū duo latera unius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando eſſe æqualia, & aliquando inæqualia; Id, quod in propos. 24. polliciti ſumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, *& latera* A B, A C *æqualia lateribus* D E, D F, *& angulus* A, *maior angulo* E D F, *ſintque primo hi duo anguli duobus rectis æquales: Dico triangula eſſe*



æqualia. Producatur enim E D, *ad* H, *&* F D, *ad* I. *fiatq;*
23.primi *angulus* E D G, *æqualis angulo* A, *& recta* D G, *rectæ* D F, *ſeu* A C; *ducanturque rectæ* E G, G F. *Quoniam igitur duo anguli* A, *&* E D F, *ponuntur æquales duobus rectis, & angulus* E D G, *æqualis eſt angulo* A; *erunt & anguli* E D G, E D F, *duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli*

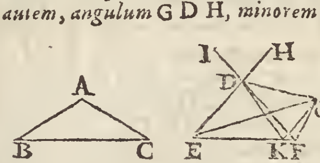
gũli E D G G D H, duobus rectis æquales; Igitur anguli 13 primi
E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt: Qua-
re ablato communi angulo E D G, remanebit angulo E D F, 3. pron.
æqualis angulus G D H: Eſt autem eidem angulo E D F, 15. primi
æqualis angulus H D I; Igitur & anguli G D H, H D I,
æquales erunt, atque adeo angulus G D H, dimidium erit to-
tius anguli G D I. Rurſus quia latera D F D G, ſunt æqua-
lia in triangulo D F G; erunt anguli D F G, D G F, æqua- 5. primi
les; qui cum æquales ſint externo angulo G D I, erit uterlibet 32. primi
eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Oſtenſum eſt
autem, angulum G D H, dimidium quoque eſſe eiuſdem angu-
li G D I: Quare anguli G D H, D G F, æquales erunt. Et
quia ſunt alterni inter E H, F G; erunt E H, F G, parallelæ 27. primi
Quamobrem triangula D E G, D E F, æqualia erunt, cum 37 primi
habeant eandem baſin D E, ſintque inter eaſdem parallelas
D E, F G. Quoniam uero triangulum D E G, æquale eſt tri- 4 primi
angulo A B C, propterea quod latera D E, D G, æqualia ſunt
lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G; erit &
triangulum A B C, triangulo D E F, æquale, quod eſt pro-
poſitum.

SINT ſecundo anguli A, & E D F, duobus rectis ma-
iores; Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulũ,
minꝰ eſſe triãgulo DEF.



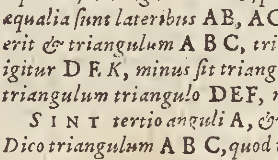
Producatur enim E D,
ad H, & F D, ad I, fi-
atq; angulus E D G, æ-
qualis angulo A, & re- 23 primi
cta D G, rectæ D F, ſeu 3. primi
A C, æqualis, ducanturque rectæ E G, G F. Quoniam igi-
tur anguli A, & E D F, ponuntur maiores duobus rectis, erũt
& anguli E D G, E D F, duobus rectis maiores; Sunt autẽ
anguli E D G, G D H, æquales duobus rectis; Igitur angu- 13. primi
li E D G, E D F, maiores ſunt angulis E D G, G D H; Qua-
re ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, ma-
ior angulo G D H. Quoniam uero angulus E D F, angulo 15. primi
H D I, æqualis eſt, erit quoque H D I, maior quã G D H; at-
que adeo G D H minor quam dimidium anguli G D I. Rur-
ſus quia latera D G, D F, æqualia ſunt, erunt anguli D F G, 5 primi
D G F, æquales; qui cum ſint æquales externo G D I, erit uteruis 32. primi
eorum,

eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Oſtenſum eſt
autem, angulum G D H, minorem eſſe dimidio eiuſdē G D I;



Quare D GF, maior erit,
quam GDH. Abſcinda-
tur ex angulo D G F, an-
23.primi. gulus DGK, æqualis an-
gulo alterno GDH: Erit
27.primi. ergo G K, parallela ipſi
D E, ſecabitq; G K, rectā EF. Ducatur ex D, ad K, ubi GK,
ſecat rectam E F, recta D K. Erit igitur triangulum D E G,
37.primi æquale triangulo D E K. Quoniam autem triangulum DEG,
4.primi æquale eſt triangulo A B C, propterea quod latera D E, D G
æqualia ſunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG;
erit & triangulum A B C, triangulo D E K, æquale. Cum
9. pron. igitur D E K, minus ſit triangulo D E F, erit quoque ABC,
triangulum triangulo DEF, minus: Quod eſt propoſitum.

SINT tertio anguli A, & E D F, duobus rectis minores:
Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, maius
eſſe triangulo D E F. Producatur E D, ad H & F D, ad I,



23.primi fiatq; angulus EDG, æqualis
angulo A, & recta D G, recta
D F, ſeu A C; ducanturq; re-
ctæ E G, G F. Quoniam igitur
anguli A, & E D F, ponuntur
minores duobus rectis, erunt
quoque anguli EDG, EDF,
13.primi duobus rectis minores. Sunt autem anguli EDG, GDH, duo-
bus rectis æquales; Igitur EDG, EDF minores ſunt, quam
EDG, GDH; demptoq; communi EDG, remanebit EDF,
15.primi minor, quam GDH; Eſt uero EDF, æqualis ipſi HDI. Quare
& HDI, minor erit quam GDH, atque adeo GDH, maior
eſt dimidio anguli GDI. Quoniam autem DGF, dimidium
eſt eiuſdē anguli GDI, ut iam ſupra oſtenſum fuit; erit GDH,
maior, quam DGF: Fiat igitur angulus D G K, æqualis an-
gulo G D H, ducta recta G K, q̄ ſecabit rectam E F, protractā
27.primi in K, & ducatur recta D K: Eritque, ut prius, G K, paral-
37.primi lela ipſi DE, triangulumq; DEG, triangulo DEK, æquale:
4.primi Eſt autem iterum D E G, æquale ipſi A B C. Igitur &
9. pron. A B C, æquale eſt ipſi D E K; Quocirca cum D E K, ma-
ius

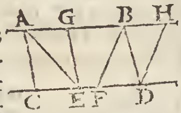
ius ſit quam D E F; *erit &* A B C, *maius, quam* D E F; *Quod demonſtrandum erat.*

Ex his perſpicuum eſt, cur Euclides *in propos. 24. ſolum collegerit inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, ut ibidem admonuimus.*

THEOR. 28. PROPOS. 38. 38.

TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

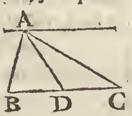
INTER parallelas AB, CD, & ſuper æquales baſes CE, FD, ſint conſtituta triangula ACE, BFD. Dico ipſa eſſe æqualia. Ducatur.n. EG, parallela ipſi AC, & DH, ipſi BF; Eruntq; *31. primi* parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. *36. primi* Cum igitur horum dimidia ſint *34. primi* triangula ACE, BFD; erunt hæc inter *7. pron.* intr ſe æqualia. Triangula ergo ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLION.

CONVERSA *huius oſtendetur ab* Euclide *propos.* 40.

COLLIGITVR *autem ex hac propoſitione, ſi a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum bifariam, triangulum quoque bifariam ſecari. Ducatur enim in triangulo* A B C, *ex angulo* A, *recta* A D, *diuidens bifariam latus* B C, *in* D; *Dico triangulum* A B C, *bifariam quoque ſecari. Si enim per* A, *ducatur parallela ipſi* B C, *erunt duo triangula* A B D, A D C, *inter eaſdem parallelas, et ſuper æquales baſes;* *38. primi* *Quare æqualia erunt.*

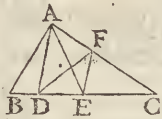


EX

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in uno latere trianguli propoſiti lineam rectam ducere, quę bifariam ſecet triangulum datum.

Sit triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod ſi punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, ut eſt oſtenſum: Si uero D, non diuidat

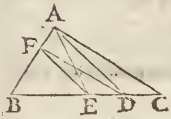


10. primi B C, bifariam, ſecetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppoſitum A, duca-

31. primi tur recta D A, & per per E, parallela E F, ipſi D A, ſecans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuiſum bifariam a linea D F. Nam ducta re-

37. primi cta E A, erunt triangula E F A, E F D, æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin E F, & inter eaſdem parallelas E F, A D. Addito igi-

2. pron. tur communi C F E, erunt tota triangula A E C, C D F, æqualia: Eſt autem A E C, dimidium totius A B C, ut iam fuit oſtenſum; Igitur & C D F, dimidium eſt eiuſdem trianguli A B C. quod erat probandum.



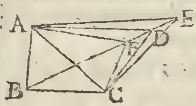
Qvod ſi punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: ſed tunc triangulum abſcindetur ad partes B, trapezium uero ad partes C, ut figura præſens ſatis indicat. Demonſtratio autem eadem eſt, ſi in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos uniuerſalius proponemus ad finem ſexti libri.

39.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.

Sint duo triangula æqualia A B C, D B C, ſuper eandem baſin B C, & ad eaſdē partes; Dico ipſa eſſe inter eaſdem parallelas conſtituta hoc eſt, rectam ductam A D, parallelam eſſe ipſi B C. Si enim non



31. primi eſt, ducatur ex A, parallela ipſi B C, quæ

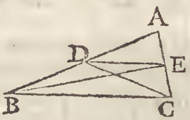
quæ vel cadet ſupra A D, vel infra. Cadat primo ſupra, qua-
lis eſt A E, coeatq; cum B D, protracta, in E, & ducatur re-
cta E C. Quoniam igitur parallelæ ſunt A E, B C, erit trian
gulo A B C, triangulum E B C, æquale: Eſt autem per hy- 37. primi.
potheſin triãgulum quoq; D B C, æquale eidem triangulo
A B C; Igitur erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars 1. pron.
& totum, quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per
A, cadat infra A D, qualis eſt A F; ducta recta F C, erũt ea-
dem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars
& totum; quod eſt abſurdum. Erit igitur A D, parallela
ipſi B C. Quare triangula æqualia ſuper eadem baſi, &c.
Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

Ex his infert Campanus ſequens hoc theorema.

LINEA recta ſecans duo trianguli latera biſariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D F, latera A B, A C, trianguli A B C, biſariam in D, & E. Dico D E, parallelam eſſe lateri B C. Cũ enim triangula A D E, B D E, ſint ſuper æquales baſes A D, D B, & inter eaſdem parallelas; (ſi per E, duceretur parallela ipſi A B,) erit triangulum



B D E, triangulo A D E, æquale: Ea- 38. primi.
dem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E,
æquale; Igitur triangula D B E, C E D, æqualia erunt: Ha- 1. pron.
bent autem eandem baſin D E, & ſunt ad eaſdem partes con
ſtituta: Quare inter eaſdem erunt parallelas, & idcirco D E, 39. primi.
B C, parallelæ erunt; Quod eſt propoſitum.

ID autem, quod ad finem ſecundi theorematis in ſcholio propoſ. 34. polliciti ſumus, facile ex hac propoſ. demonſtrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum quod ab vtraq; diametro biſariã diuiditur, parallelogrammũ eſt.

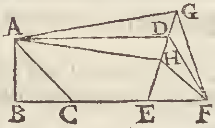
NAM quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraq; diametro A C, B D. Dico ipſum eſſe parallelogrammũ. Cum enim triangula A D C, B D C, dimidia ſint eiuſdem quadrilateri A B C D, ipſa inter ſe æqualia erunt. Quare cum eandem habeant baſin D C, ad eaſdemq; partes ſint, ipſa



39. primi. *in eiſdem parallelis erunt: Atq; idcirco A B, D C, parallelæ ſunt. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe A D, B C. Parallelogrammum igitur eſt A B C D. Quod eſt propoſitum.*

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſup̃ æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.



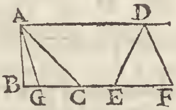
SINT duo triangula æqualia A B C, DEF, ſuper baſes æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ B F. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi B F, per A, ducta vel ſupra A D, vel infra. Cadat primo ſupra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniã igitur parallelæ ſunt A G,
38. primi. B F, erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale; Ponitur autem, & triangulum DEF, eidem triangulo A B C,
1. pron. æquale: Igitur triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum; Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis eſt A H; ducta recta HF, erũt eadẽ argumẽtatione triãgula HEF, DEF, æqualia, pars & totũ; qđ eſt abſurdũ. Eſt igit̃ A D, parallela ipſi B F. Quare triãgula æqualia ſup̃ æqualib⁹ baſibus, &c. Qđ erat demonſtrandũ.

SCHOLION.

EODEM modo demonſtrari poterit hoc theorema.

TRI-

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

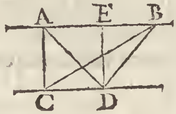


SINT triangula æqualia, ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & ſuper baſes BC, EF, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, maior. Abſciſſa ergo recta CG, æquali ipſi EF, & ducta recta GA, erit triangulum AGC, triangulo DEF, æquale. 38.primi. *Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula AGC, ABC, æqualia erũt,* 1. pron. *pars & totum; quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

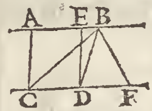
INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt triangula ACD, BCD, æqualia; 37.primi. At parallelogrammum ACDE, duplum eſt trianguli ACD; 34.primi. Igitur & trianguli BCD, duplum erit idẽ parallelogrammũ ACDE. Quamobrem, ſi parallelogrammum cũ triangulo, &c. Quod erat demonſtrãdũ.



SCHOLION.

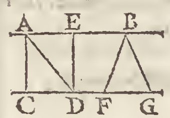
HINC ſequit̃, ſi triangulũ duplã habuerit baſin, fueritq; in eiſ-

in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis C D. producatur ad F, vt ſit D F, æqualis ipſi C D, ducaturq; recta F B, erit triangulum B C F, duplum trianguli B C D, quod



38.primi. *triangula B C D, B D F, æqualia ſint: Eſt au-*
41.primi. *tem & parallelogrammum A C D E, duplum eiuſdem trian-*
6. pron. *guli B C D: Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum A C D E.*

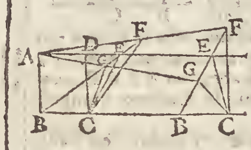
IDEM *hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintq; in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo A C D E, & triangulo B F G, quorum baſes C D, F G, æquales ſunt. Ducta enim diametro A D, in parallelo-*



38. primi. *grammo, erunt triangula A C D, B F G, æqualia; Cum igitur parallelogrammum*
34. primi. *A C D E, duplum ſit trianguli A C D: erit quoque idem trianguli B F G, duplum. Eadem ratione ſi baſis F G, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſ-*
38.primi. *ſet duplum etiam trianguli B F G, &c.*

CONVERSVM *huius theorematis duplex eſt, hoc modo.*

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemq; parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.



SIT *parallelogrammũ A B C D, duplum trianguli E B C ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales; Dico rectam ductam A E, parallelam eſſe rectæ BC. Nam alias ducta parallela ex A, cadet aut ſupra*

ſupra A E, aut infra. Vnde vt in 39. vel 40. propoſ. oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. Quod eſt abſurdum.

Sit deinde parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E F G, in eiſdemq; parallelis: Dico baſes B C, F G, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe B C, ſit maior, abſciſſa æquali C H,

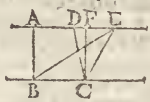


& ducta H I, parallela ipſi A B, demonſtrabimus parallelogramma A B C D, I H C D, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli E F G; illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis F G, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi B C, æqualis F H, ducaturq; recta H E, erunt triangula E F H, E F G, æqualia, pars & totum; (nam vtrũq; dimidium eſt parallelogrammi A B C D; Illud quidẽ per propoſ. 41. hoc vero per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

EX PROCLO.

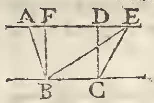
Si triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

Inter lineas parallelas A E, B C, ſint conſtituta trapezium ABCD, & triangulum E B C, ſuper baſim B C, eandem, quæ ſit tamen maior quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus eſſe duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam



B C, ſumatur A F, æqualis ipſi B C, & ducatur recta C F, quæ erit parallela ipſi A B; Atq; adeo parallelogrammum erit A B C F, *33. primi* quod duplum eſt trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cum *41. primi.* ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli E B C, quod eſt propoſitum.

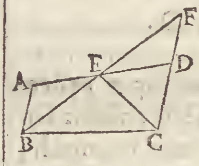
Sint rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis



B C, ſit minor quã reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior ſit, quam B C, abſcindatur D F, æqualis ipſi BC, & ducatur recta B F, quæ erit paralle-
33. *primi.* la ipſi C D, atq; adeo parallelogrammum erit BCDF, quod duplũ
41. *primi.* eſt trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod ſuperat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiuſdem trianguli E B C. quod eſt propoſitum.

IDEM concludetur, ſi trapezium, & triangulum conſtituta fuerint ſuper æquales baſes, ita tamen vt nunc quidem baſis trapezij ſit maior latere oppoſito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppoſiti.



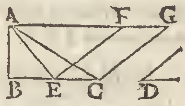
SIT trapezium ABCD, cuius duo latera oppoſita A B, D C, ſint parallela, & ſuper baſin B C, conſtituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD: Dico trapezium ABCD, duplum eſſe trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E, donec coeat cum C D, pro-
29. *primi.* tracto in F. Et quia parallelæ ſunt A B, C F, erunt anguli alterni,
15. *primi.* B A E, F D E, æquales: Sunt autem & anguli A E B, D E F, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A B E, lateri D E, trianguli D F E, æquale, per hypoteſin: Igitur & reli-
26. *primi.* qua latera A B, B E, reliquis lateribus, D F, F E, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales. atq;
4. *primi.* idcirco triangula A B E, D F E, æqualia erunt. Quare addito com-
2. *pron.* muni triangulo C D E, erunt triangulo C E F, æqualia triangula
38. *primi.* A B E, C D E: Eſt autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale, quod baſes B E, E F, oſtẽſæ ſint æquales, & ipſa triã gula inter eaſdẽ ſint parallelas, ſi p C, duceretur parallela ipſi B F. Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidiũ erit trapezii A B C D, quod eſt propoſitum.

42. PROBL. 11. PROPOS. 42.

DATO triangulo æquale parallelo-

gram-

grammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

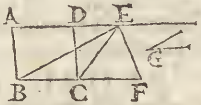


Datum triangulum ſit A B C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur conſtruere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habẽs angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, biſariam in E, & 10.primi.
fiat angulus C E F, æqualis angulo D: Ducatur itẽ per A, 23.primi.
recta A F, parallela ipſi B C; quæ ſecet E F, in F. Rurſus per 31.primi.
C, ducatur ipſi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritq; conſtitutum parallelogrammũ CEFG, quod dico eſſe æquale triangulo ABC. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, duplum eſt 41.primi.
trianguli AEC; & triangulum ABC, duplum eiuſdem trianguli AEC, quod triangula AEC, ABE, ſuper æquales baſes BE, EC, & in eiſdem parallelis, ſint æqualia: Erunt paral 38.primi.
lelogrammum CEFG, & triangulum ABC, æqualia inter 6. pron.
ſe. Cum igitur angulus CEF, factus ſit æqualis angulo D, conſtat propoſitum. Quocirca dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtituimus in dato angulo rectilineo; Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Svbivngit hoc loco Peletarius ſubſequens problema.

Dato parallelogrammo æquale triangulũ conſtituere, in dato angulo rectilineo.



Sit datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G æqualis, ſecetq; recta BE, rectã AD, productã in E: Extendat quoq; B C, ad F, ſitq; CF, æqualis rectæ BC. Dico triãgulũ BEF, habẽs angulũ EBF, 23.primi.

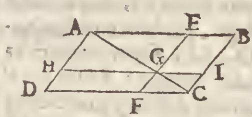
 angulo

angulo dato G æqualem, æquale eſſe parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta C E, erit parallelogrammum A B C D, du-
41. primi. *plum trianguli B C E; Item triangulum B E F, eiuſdem trian-*
38. primi. *guli BCF, duplum; quod æqualia ſint triangula E B C, E B F.*
6. pron. *Quare æqualia inter ſe erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F.*

43.

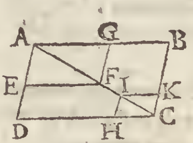
THEOR. 32. PROPOS. 43.

IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.



In parallelogrãmo ABCD, ſint circa diametrum A C, parallelogrãma AEGH, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia. Cum
34. primi enim triangula A B C, C D A, æqualia ſint; Itemq; triangula A E G, G H A; ſi hæc ab illis demantur, remanebunt
3. pron. trapezia C B E G, C D H G, æqualia: Sunt autem & trian
34. primi. gula C G I, C G F, æqualia. Quare ſi detrahantur ex tra-
3. pron. pezijs, remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod oſtendendum erat.

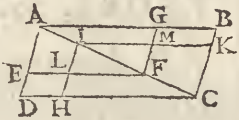
SCHOLION.



Eodem modo hoc theorema demonſtratur a Proclo, etiam ſi duo parallelogramma circa diametrũ nõ con iungantur in puncto G, ſed vel vnum ab altero ſit ſemotum, vel ambo ſe mutuo interſecent. Sit enim prius vnum ab altero diſtans, ita vt complementa ſint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo A B C D, circa diametrum A C,

conſiſtat

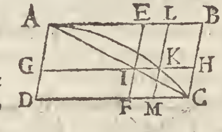
conſiſtant parallelogramma A E F G, C H I K: Dico complementa D E F I H, B K I F G, eſſe æqualia. Cum enim triangula A B C, C D A, æqualia inter ſe ſint; Item triangula A E F, C H I, æqualia triangulis A G F, C K I; 34. primi. *erunt reliqua complementa D E F I H, B K I F G, æqualia. Quod eſt propoſitum.* 3. pron.



S E C E N T *ſe iam mutuo parallelogamma A E F G, CHIK, circa diametrum, ita vt communem partem habeant I L F M; Dico adhuc cōplementa DELH, BGMK, eſſe æqualia. Cum enim æqualia ſint triangula A B C, C D A; Item triangula A F G, A F E;* 34 primi. *erunt reliqua quadrilatera B C F G, D C F E, æqualia;* 3. pron. *Sunt autem rurſus æqualia triangula I F M, I F L;* 34. primi. *Igitur ſi hæc addātur dictis quadrilateris, erūt figuræ B C I M G, D C I L E, æquales:* 2. pron. *Cum igitur & æqualia ſint triangula C I K, C I H,* 34. primi. *erunt reliqua complementa B G M K, DELH, etiam æqualia. Quod eſt propoſitum.* 3. pron.

C O N V E R S V M *quoq; huius theorematis cum Peletario demonſtrabimus, hoc modo.*

S I parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogrāma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia; conſiſtent reliqua duo circa diametrum.



D V C T I S *duabus rectis E F, G H, quæ ſint parallelæ rectis B C, C D, ſeq; ſecent in I, diuidatur parallelogrammum A B C D, in quatuor parallelogramma, quorū aduerſa duo B E I H, D F I G ſint æqualia: Dico reliqua duo A E I G, C F I H, circa diametrum conſiſtere, hoc eſt, diametrum a puncto C ad punctum A, ductam tranſire per punctum I. Si enim non tranſit, ſecet diameter C K A, rectam G H, in K, ſi fieri poteſt, & per K, ducatur L M, parallela ipſi B C.* 31. primi. *Erunt igitur complementa B H K L, D G K M,* 43. primi. *æqua-*

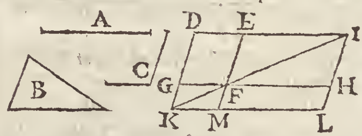
9 pron. *æqualia: Eſt autem DGKM, maius quã DGIF; Quare & maius erit BHKL, quã DGIF. Cum ergo DGIF, æquale ponatur ipſi BEIH, erit etiam BHKL, maius, quam BEIH, pars quàm totũ; Quod eſt abſurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, ſecat, ſed per punctum I, tranſit. Quod eſt propoſitum.*

44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. oportet igitur conſtituere parallelogrammum ęquale triangulo B, angulum habens ęqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Cõſtituatur trian-

42. *primi.*



gulo B, æquale parallelogrãmũ DEFG, habens angulũ EFG, angulo C, æqualem, producaturq; GF, ad H, vt

31. *primi.* FH, ſit æqualis rectæ A; & per H, ducatur HI, parallela ipſi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectę DG, productæ in K; & per K, ducatur KL, parallela ipſi GH, ſecans IH, protractam in L, producaturq; EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, eſſe id, quod quæritur; Habet enim latus FH, ęquale datæ rectæ A. & angulum HFM, angulo dato C, æqualẽ,

15. *primi.* cum angulus HFM, æqualis ſit angulo EFG, qui factus eſt æqualis angulo C: Deniq; parallelogrammum LMFH, æ-

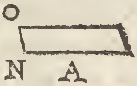
43. *primi.* quale eſt triangulo B, cũ æquale ſit cõplemento DEFG, quod factũ eſt æquale triangulo B. Ad datã igitur rectã lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

QVOD ſi quis optet, lineam ipſam A, eſſe vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammũ

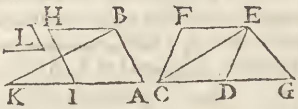
FMLH,

F M I H, ad rectam A, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & ſumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq́; parallelogrammum, ceu in dicto ſcholio traditũ fuit, effectum erit, quod quæritur.



ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.



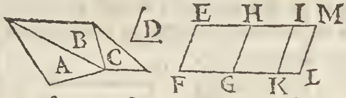
SIT data recta AB; datũ parallelogrãmũ CDEF, & datus angulus L. Producatᷣ CD, ad G, vt DG, æqualis ſit ipſi CD, & iungatur GE, recta: Eritq́; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonſtrauim⁹ ſcholio propoſ. 41. Fiat iã ſuper data recta A B, parallelogrammum ABHI, æquale triãgulo CEG, hoc eſt, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt ſit I K, æqualis ipſi AI, iungaturq́; recta BK. Dico triangulum ABK, conſtitutum ſuper datam rectam AB, habensq́; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale eſſe dato parallelogrammo CDEF. Cum enim triangulum A B K, æquale ſit parallelogrammo ABHI, ex ſcholio propoſ. 41. quod æquale eſt conſtructum parallelogrammo CDEF, conſtat propoſitum. 44. *primi.*

PROBL. 13. PROPOS. 45.

O.

DATO rectilineo æquale parallelogrãmum cõſtituere, in dato angulo rectilineo.

DATVM rectilineum ſit A B C, & datus angulus D: oportet igitur cõſtruere parallelogrammũ ęquale rectilineo ABC, qđ habeat angulũ æqualẽ angulo D. Reſoluatᷣ rectilineũ ĩ triãgula A, B, & C. Deinde triãgulo A, ęquale paralle- 42. *primi.*
logram-



logrammum cõſti-
tuatur E F G H, ha
bens angulum F, an
gulo D, æqualem.
44. *primi.* Item ſuper rectam G H, parallelogrammum G H I K,
æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem an
gulo D. Item ſuper rectam I K, parallelogrammum
I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K,
æqualem angulo D; Et ſic deinceps procedatur, ſi plura
fuerint triangula in dato rectilineo, factumq; erit, quod iu-
betur. Nam tria parallelogramma conſtructa, quæ quidem
æqualia ſunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnũ
parallelogrammum, quod ſic demonſtratur. Duo anguli
E F G, H G K, inter ſe ſunt æquales, cum vterq; æqualis ſit
angulo D. Addito igitur cõmuni angulo F G H, erunt duo
29. *primi.* anguli E F G, F G H, qui duobus rectis æquiualent, æqua-
les duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus
14. *primi.* etiam rectis æquales erunt. Quare F G, G K, vnam rectã
lineam efficient. Eadem ratione oſtendemus, E H, H I, vnã
rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G,
H I K, æquales inter ſe ſint, (cum ſint æquales oppoſitis an
34. *primi.* gulis æqualibus E F G, H G K.) & duo anguli H I K, I H G,
29. *primi.* duobus ſint rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, ſint
30. *primi.* parallelæ; Itemq; E F, I K, quod vtraq; parallela ſit rectæ
H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo de-
monſtrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum
parallelogrammo E F K I, conſtituere totum vnum paral-
lelogrammum E F L M. Dato ergo rectilineo A B C, con-
ſtituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens an-
gulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendũ.

SCHOLION.

QVAMVIS in hoc problemate Euclides abſolute, & ſimpliciter docuerit, quanam arte parallelogrammum conſtituatur æquale rectilineæ figuræ datæ, non aſtringendo nos ad certam aliquam lineam rectam datam, vt in propoſ. 44. fecerat: Tamen eodem modo, quod iubetur, efficiemus, ſi recta aliqua linea nobis fuerit aſſignata. Nam ſi detur recta linea

E F,

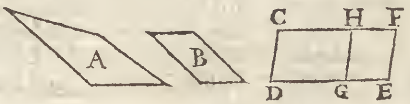
EF, ſuper ipſam conſtruemus parallelogrammum E F G H, æquale triangulo A. Et eodem modo ſuper G H, conſtituemus aliud G H I K, æquale triangulo B, &c. Quibus peractis, conſtitutum erit ſuper datam rectam E F, parallelogrammum E F L M, æquale rectilineo dato, in dato angulo F, qui æqualis eſt angulo D, propoſito. 44.primi.

PARI ratione, propoſitis quotcunq; rectilineis, conſtituemus illis parallelogrammum æquale, ſi omnia reſoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, ſingulis ſingula, per propoſ. 42. & 44. ceu factum eſt ab Euclide in hoc problemate. Nam cũ omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, veluti hic demonſtratum fuit, conſtitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propoſitis. Vt ſi quis intelligat duo rectilinea propoſita A B, & C; Atq; A B, reſoluatur in triangula A, & B, ſingulisq; triangulis A, B, C, ſingula parallelogramma E G, G I, I L, iuxta artem huius problematis, æqualia conſtituantur, ex propoſ. 42. & 44. erit conſtructũ parallelogrãmũ totum EFLM, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et ſic de pluribus.

HVC referri poterit problema vtiliſſimum ex Peletario, qđ nos tamẽ alio modo, et breuiori demõſtrabim⁹, in hũc modũ.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.

SINT data rectilinea A, & B, ſitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, ſuperet

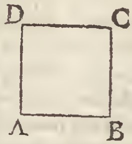


rectilineum B. Fiat parallelogrammum C D E F in quocũq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et ſuper rectam C D parallelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, ſuperat parallelogrammum C D G H, parallelogrammo E F H G; ſuperabit quoq; figura A, figurã B, eodẽ parallelogrãmo EFHG. Quod eſt propoſitum. 45.primi.

PRO-

PROBL. 14. PROPOS. 46.

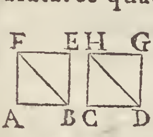
A DATA recta linea quadratum deſcribere.



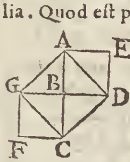
SIT data recta AB, ſup quã oporteat quadratũ deſcribere. Ex A, & B, educantur AD,
11. primi. BC, perpendiculares ad AB, ſintq; ipſi AB, æquales, & cõnectatur recta CD. Dico ABCD, eſſe quadratũ. Cum. n. anguli A, & B,
28. primi. ſint recti, erunt AD, BC, parallelæ: Sunt aũt & æquales, quod vtraq; æqualis ſit ipſi AB; Igitur & AB,
33. primi. DC parallelæ ſunt & ęquales: & ideo parallelogrammũ eſt ABCD; in quo, cũ AD, DC, CB, æquales ſint ipſi AB, omnes quatuor lineę æquales exiſtũt; Sunt aũt & oẽs quatuor
34. primi. anguli recti, cũ C, & D, æquales ſint oppoſitis rectis A, & B. Quadratũ igitur eſt ABCD, ex definitione; Ac pinde a data recta linea quadratũ deſcripſimus; Quod faciendũ erat.

EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia ſunt quadrata: & quadratorũ æqualiũ æquales sũt lineæ.



SINT primo rectæ AB, CD, æquales; Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; eſſe. Ductis enim diametris BF, DH, erũt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus laterib⁹ DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq; , cũ ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales ſint rectis AB, CD: Sunt autem, & anguli A, & C, æ-
4. primi. quales, nempe recti: Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt.
34. primi. Quæ cum ſint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod eſt propoſitum.



SINT ſecundo quadrata ABDE, BCFG, æqualia; Dico lineas quoq; ipſorũ AB, BC, ęquales eſſe. Cõiungantur. n. quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directũ cõſtituantur. Et quoniã anguli
14 primi. ABG, ABD, ſunt recti, erũt & rectæ GB, BD, in directũ cõſtitutæ. Ducãtur diametri AD, CG, iungãturq; rectę AG, CD. Quoniã igitur quadrata ABDE, BCFG, ęqualia ſunt, erũt & triãgula ABD, BCG, eorũ dimidia, æqualia. Addito ergo cõi triãgulo BCD, fiet totũ triangulũ ACD, toti triãgulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cũ eandem

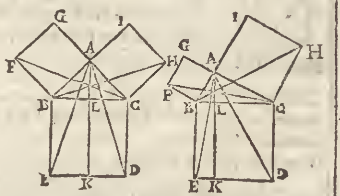
dem habeāt baſin CD, ad eaſdēq; ſint partes, in eiſdē ſunt paralle- *39 primi.*
lis, ideoq; parallelæ ſunt AG, CD. Et qm̄, vt in ſcholio propoſ. 34.
oſtēdimus, diameter in quadrato ſecat angulos quadrati bifariā,
erūt anguli DAC, GCA, alterni ſemirecti, ideoq; æquales. Quãobrē & parallelæ ſunt AD, CG; Igitur parallelogrãmū eſt ADCG, ac *27.primi.*
propterea rectæ AD, CG, æquales: Quoniã ergo in triãgulis ABD,
BCG, latera AD, CG, ęqualia sūt, & anguli, qb⁹ ea latera adiacēt, *34.primi.*
inter ſe ēt æquales, cū ſint ſemirecti, vt ĩ ſcholio ꝓpoſ. 34. oſtēſum
fuit; erūt reliqua latera ęqualia, nēpe AB, ipſi BC, &c. Qđ ē ꝓpoſitū. *36.primi.*

SCHOLION.

POSSENT *hæc omnia multo breuius probari per ſuperpoſitionē quadrati vnius ſuper aliud. Nã ſi lineæ ſunt æquales, ſi vna alteri ſuperponatur, congruent ipſæ inter ſe; Cū ergo & anguli ſint æquales, nempe recti, conueniēt quoq; ipſi inter ſe, ideoq; totū quadratū toti quadrato congruet. Quod ſi quadrata ſunt æqualia, cõgruent ipſa inter ſe, propter æqualitatē angulorū; Igitur & lineæ; alias vnū quadratū alio maius eſſet.*

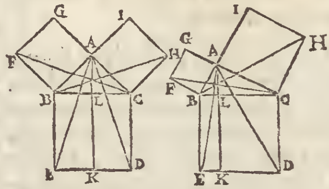
THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectãgulis triãgulis, quadratū, quod a latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.



IN triangulo ABC, angulus BAC, ſit rectus, deſcribãturq; ſuper AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI *46.primi.*
BCDE: Dico quadratū BCDE, deſcriptū ſuper latus BC, quod angulo recto opponit̃, ęquale eſſe duob⁹ quadratis ABFG, ACHI, quę ſuꝑ alia duo latera ſunt deſcripta, ſiue hęc duo latera æqualia ſint, ſiue inæqualia. Ducatur enim recta
A K, parallela ipſi BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L *31.primi.*
& iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, & BAG, ſunt recti, erunt rectæ GA
AC, vna linea recta; eodēq; modo IA, AB, vna recta linea *14.primi.*
erunt.

erunt. Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales, cū ſint recti, ſi addatur communis angulus A B C, fiet totus angu-
2. pron. lus CBF, toti angulo ABE, ęqualis; ſimiliterq; totus angul⁹ B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumq; vtriq; , vt conſtat ex definitione quadrati; Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hiſce lateribus æ-



quales, vt oſtendimus;
4. primi. Erunt triāgula A B E, F B C, æqualia. Eſt autē quadratum, ſeu pa-
41. primi. rallelogrāmū A B FG, duplū trianguli F BC, cum ſint inter parallelas B F, C G, & ſuper eandem baſin B F; Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod ſint inter parallelas B E, A K, & ſuper
6. pron. candē baſin B E. Quare æqualia erunt quadratū A B F G, & parallelogrammum BEKL; Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum A C H I, & parallelogrammum CDKL. Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq; eorū́m dupla, parallelogrammū videlicet CDKL, & quadratum ACHI. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale eſt duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

INVENTIO huius theorematis ad Pythagoram refer-
cap. 2. *tur, qui, vt ſcribit Vitruuius lib. 9. hoſtias Muſis immolauit, quod ſe in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolaſſe centum boues; ſi tamen Proclo credendum eſt, vnum tantummodo obtulit. Fortaſſe autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occaſionem ſumpſit, vt theorema hoc inueſtigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter eſſet contemplatus, vidiſſetq; quadratum numerum maioris æqualem eſſe quadratis numeris reliquorum, compoſuit*

poſuit triangulum ſcalenum, cuius maximum latus diuiſum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiuſdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, conſiderauit angulum ſub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum eſſe rectum; Idque in quamplurimis alijs numeris, vt in 6, 8, 10. & in 9. 12. 15. &c. obſeruauit. Quare inquirendum eſſe iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale eſſet, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem ſecundum dictos numeros, continebant unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi uoluptate adinuenit, firmaq; ratione demonſtrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonſtrauit, non ſolum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale eſſe quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figurã quãlibet rectilineam ſuper latus recto angulo oppoſitum conſtructam, ſiue ea ſit triangulũ, ſiue quadrangulum, ſiue quinquangulum, &c. æqualem eſſe duabus figuris, quæ ſuper reliqua latera deſcribuntur, dummodo priori ſint ſimiles ſimiliterq; deſcriptæ, ut ibidem oſtendemus.

CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale eſt quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiuſmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. ſi duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. ſi iidem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & ſi quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, ſi primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima aſcribitur Pythagoræ, & eſt huiuſmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. reijce vnitatem; Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui ſi addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale eſt quadratis aliorum. Quod ſi numerus impar acceptus fuiſſet 3. eſſent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula

K tribuitur

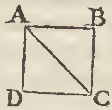
tribuitur Platoni, quæ talis eſt. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6; Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros. 8. & 10. primus .n. eſt 6. nimirũ numerus par acceptꝰ. Hac regula ſi accipiat̃ par 10. reperient̃ alij duo 24. et 26.

COLLIGVNTVR *ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima ſcitu non iniucunda tam theoremata, quã problemata, e quibus viſum eſt ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc ſumentes.*

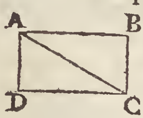
I. SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro deſcriptum duplũ erit prædicti quadrati.

IN *quadrato* A B C D, *ducatur diameter* A C; *Dico quadratum* A C, *duplum eſſe quadrati* A B C D. *Cum enim in triangulo* A B C, *angulus* B *rectus ſit, erit quadratum lateris* A C, *æquale duobus quadratis laterum* A B, B C. *Cum igitur quadrata linearũ* A B, B C, *æqualia ſint, quod lineæ* A B, B C, *ſint æquales; erit quadratum lineæ* A C, *duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ* A B, *hoc eſt, quadrati* AB-CD. *Quod eſt propoſitum.*

47. primi



II. QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium.



47. primi

IN *altera parte longiori* A B C D, *ducatur diameter* A C; *& quia in triangulo* A B C, *angulus* B, *eſt rectus, erit quadratũ lateris* A C, *æquale duobꝰ quadratis laterũ inæqualiũ* AB BC. *Quod eſt propoſitũ.*

III. SI fuerint duo triangula rectangula, quorũ latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterũ vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius.

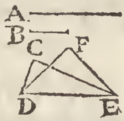
TRIANGVLORVM ABC, DEF, *anguli*, *A*, *& D*, *ſint*



ſint recti, lateraq́; oppoſita B C, E F,
æqualia : Dico duo quadrata laterum
A B, A C, ſimul ſumpta æqualia eſſe
duobus quadratis laterum D E, DF,
ſimul ſumptis. Nam quadrata linearũ B C, E F, æqualia inter 47. primi
ſe ſunt, cum & ipſæ inter ſe ponantur æquales; Quadrato autẽ
lineæ BC, æqualia ſunt quadrata linearum A B, A C; Et qua 47. primi.
drato lineæ EF, æqualia ſunt quadrata linearum D E, D F:
Perſpicuum ergo eſt, quod pronitur.

Dvobvs quadratis inæqualibus propoſi- IIII.
tis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia
ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus
inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis.

Sint A, & B latera duorum quadratorũ inæqualiũ;
Fiat angulus rectus D C E, ſitq́; D C, recta æqualis rectæ B,
& recta C E, rectæ A. Ducta deinde recta
D E, coniungente puncta D, E, ſuper ipſam
conſtituantur duo anguli ſemirecti D E F,
E D F, coeantq́; rectæ DF, EF, in F. Quo- 11. pron.
niã igitur in triangulo F D E anguli FDE,
F E D, æquales ſunt, erunt & latera D F,
E F, æqualia, ideoq́; et quadrata eorundẽ laterum æqualia. Di- 6. primi
co iam, eadem quadrata linearũ D F, EF, æqualia eſſe quadra
tis linearũ A, & B, hoc eſt linearũ CE, & CD. Nam cum in
triãgulo DEF, anguli FDE, FED, faciant vnũ rectũ, erit re
liquus angulus F, rectus. Quamobrẽ erunt quadrata linearum 32. primi
DF, EF, æqualia quadrato linea DE; ſed eidẽ quadrato lineæ 47. primi
DE, æqualia ſunt quoque quadrata C D C E; igitur quadra-
ta linearum DF, EF, æqualia ſunt quadratis linearum D C, 1. pron.
E C. Quod eſt propoſitum.

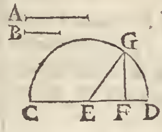


Propositis duabus lineis inæqualibus, in- V.
uenire id, quo plus poteſt maior, quam minor.

Potentia lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tan
tũ enim quæuis recta linea poſſe dicitur, quantũ eſt eius qua-
dratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq́; co-
gnoſcere, quãto maius ſit quadratũ maioris lineæ A, quã mino
ris B. Ex quauis linea recta CD, ſumatᷓ CE, æqualis rectæ A,

 & E F,

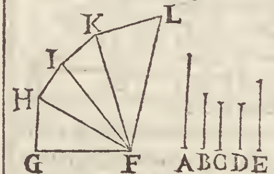
et E F. æqualis rectæ B. Deinde cētro E, & interuallo E C, ſemicirculus deſcribatur C G D; & ex F, ducatũ F G ꝑpendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc eſt, rectæ C E, ſibi æqualis, maius eſſe, quam quadratum rectæ B, hoc eſt, rectæ E F, ſibi æqualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F,



47. primi F G. Quocirca quadratum rectæ E G, hoc eſt, quadratum rectæ E C, illi æquale, ſuperabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod eſt propoſitum.

VI. PROPOSITIS quotcunque quadratis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis ęquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. oportet igitur inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque.



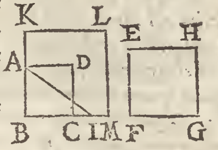
Fiat angulus rectus F G H, ſitq́; recta F G, æqualis rectæ A, & recta G H, rectæ B; Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, ſitq́; H I, æqualis rectæ C: Ducta rurſus recta I F, fiat angulus rectus F I K, ſitque I K, æqualis rectæ D: Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, ſitque K L, æqualis rectæ E. Si igitur ducatur recta F L; Dico quadratum rectæ F L, æquale eſſe quinque quadratis propoſitis. Quadratum

47. primi. enim rectæ F H, æquale eſt quadratis rectarum F G, G H, hoc eſt, quadratis rectarum A, & B. Rurſus quadratum rectæ F I, æquale eſt quadratis rectarum F H, H I, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K, æquale eſt quadratis rectarũ F I, I K, ideoq́ue quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ F L, æquale eſt quadratis rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarũ A, B, C, D, & E, Quod eſt propoſitum.

VII. PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunque, alteri illorum adiungere figuram,

quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita ut tota figura compoſita ſit etiam quadrata.

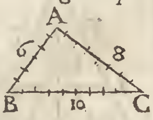
S i n t duo quadrata A B C D, E F G H, *propoſitumque ſit quadrato* A B C D, *apponere figuram, quæ ſit æqualis quadrato* E F G H, *&c. Sumatur recta* B I, *æqualis rectæ* F G, *lateri quadrati* E F G H. *Ducta autem recta* A I, *& producta recta* B A, *ad partes* A, *accipiatur* B K, *æqualis rectæ* A I, *perficiaturque quadratum* B K L M. *Dico figuram* A D C M L K, *quadrato* A B C D *adiunctam, æquale eſſe quadrato* E F G H. *Quoniam quadratum rectæ* A I, *hoc eſt, quadratum* B K L M *æquale eſt quadratis rectarum* A B, B I, *hoc eſt, quadratis* A B C D, E F G H; *ſi auferatur commune quadratum* A B C D, *remanebit figura* A D C M L K, *æqualis quadrato* E F G H. *Quod eſt propoſitum.* 47. primi



VIII.

Cognitis duobus lateribus quibuſcunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

S i t angulus A, *rectus in triangulo* A B C. *ſintque primo cognita latera* A B, A C, *circa angulum rectum, quorum* A B, *ponatur* 6 *palmorum, &* A C, 8. *Quoniam igitur quadrata rectarum* A B, A C, *nempe palmi* 36. *&* 54 *æqualia ſunt quadrato rectæ* BC; *ſi illa coniungantur ſimul, efficietur hoc palmorum* 100. *Latus ergo* B C, *continebit* 10. *palmos. Tantum enim eſt latus, ſeu radix quadrata* 100. *palmorum, vt perſpicuum eſt apud Arithmeticos. Sint ſecundo cognita latera* A B, B C, *ſitque* A B, 6. *palmorum, &* B C, 10. *Quoniam igitur quadrata rectarũ* A B, A C, *æqualia ſunt quadrato rectæ* B C; *ſi quadratum rectæ* A B, *quod continet palmos* 36. *detrahatur ex quadrato rectæ* B C, *quod eſt palmorum* 100, *remanebit quadratum rectæ* A C, 64. *palmorum. Latus ergo* A C, *continebit* 8. *palmos. Tanta enim eſt radix quadrata, ſeu latus* 64. *palmorum. Quod* 47. primi 47. primi.

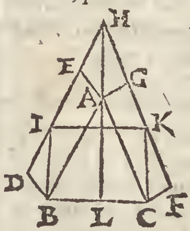


eſt propoſitum. Cæterum non ſemper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnes numeri habent latus, radicemve quadratam, vt notum eſt apud Arithmeticos; Vnde latus inuentum ſæpe numero exprimi nequit, niſi per radicem ſurdam, quam vocant: Sed de his alias.

THEOREMATE *vero hoc Pythagoreo multo vniuerſalius eſt illud, quod a Pappo demonſtratur in omni triangulo, ſiue illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunq; parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis, tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamſi non ſint inter æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo propoſuimus, & meo iudicio generalius.*

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogrãmo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelũ rectæ ductæ ab angulo, quẽ duo illa latera cõprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorũ lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli dicti producantur.

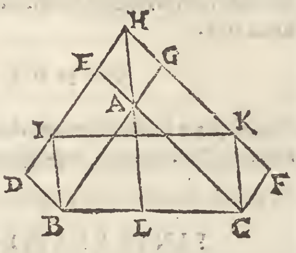
SIT *triangulum quodcunque* ABC, *conſtituanturq́; ſuper latera* AB, AC, *parallelogramma quæcunque* ABDE, ACFG, *quorum latera* DE, FG, *quæ lateribus* AB, AC, *aſſumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli* A, *dictis lateribus* AB, AC, *cõprehenſi, conueniant in* H, *ducaturq́; recta* AH. *Dico parallelogrãma* AD, AF, *æqualia eſſe parallelogrãmo ſup latus* BC, *deſcripto, cuius alterũ latus æquale ſit, & parallelũ rectæ* AH. *Producta enim* HA, *ſecet* BC, *in* L; *& per* B, C, *agantur* BI, CK, *parallelæ ipſi* AH; *iungaturq́; recta* IK. *Quoniã igitur parallelogramma ſunt* BIHA, CKHA, *erit vtraq;* BI, CK, *ipſi* AH, *æqualis; atque*



34. primi BIHA, CKHA, *erit vtraq;* BI, CK, *ipſi* AH, *æqualis; atque*
30. primi *adeo & inter ſe æquales erunt* BI CK, *quæ cũ ſint etiã parallelæ, quod eidem* AH, *parallelæ ſint; erunt quoque* BC, IK,
33 primi *parallelæ, & æquales. Quare parallelogrãmum eſt* BCKI *ſup latus*

latus BC, habẽs alterũ latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelũ: Cui quidẽ æqualia oſtendẽda ſunt parallelogrãma AD, AF. Quia æqualia ſunt parallelogrãma AD, ABIH, quod eãdẽ habeant baſin AB, in eiſdemq́; ſint parallelis AB, HD; Eſt autẽ ABIH, parallelogrãmo IL, æquale, quod illud cum hoc etiã eandẽ habeat baſin BI, in eiſdemq́; ſit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter oſtendemus, AF, ipſi KL, eſſe æquale. Quare parallelogramma AD, AF, parallelogramo BK, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum. 35. primi 35. primi

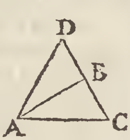
PAPPVS cõſtruit figurã aliter. Nam ſumit rectas AC, AE; et AB, AG, in directũ poſitas, ita vt parallelogrãma AD, AF, ſint æquiangula, habẽtia angulos AED, AGF, angulo BAC, ĩternos externo, æquales ceu hæc eius figura ĩdicat. Sed nos vniuerſalius rẽ ꝓpoſuimꝰ, vt manifeſtũ eſt.



THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratũ, quod ab uno laterũ trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ a reliqs trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DETVR triangulum ABC, ſitq; quadratũ lateris AC, æquale quadratis reliquorũ laterũ BA, BC: Dico angulũ ABC, eſſe rectũ. Ducatur namq; BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturq; recta AD. Quoniã igitur in triãgulo ABD, angulus ABD, rectus eſt, erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarũ BA, BD: Eſt autẽ quadratũ rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearũ æquali- 47. primi



taſe: Quare quadratũ rectę A D quadratis rectarũ B A, B C, æquale erit. Cũ ergo quadratũ rectę A C, eiſdẽ quadratis rectarũ B A, B C, ęquale ponatᵉ, erũt quadrata rectarũ A D, A C, inter ſe æqualia, ac propterea & rectę ipſę A D, A C, æquales. Quoniã igitur latera B A, B D triãguli A B D, æqualia ſunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & baſis A D, oſtenſa eſt
8. *primi* æqualis baſi A C; erunt anguli A B D, A B C, æquales: Eſt autem angulus A B D, ex conſtructione rectus: Quare & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM *eſt autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perſpicuum eſt.*

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM II.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

AGIT Euclides in ſecundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta ſint & quadrata partiũ cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectãgula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tam inter ſe, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonſtranda ſunt, recte intelligenda maxime neceſſaria.

PRIORI *definitione exponit, ſub quibus rectis lineis cõtineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid ſit, parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum eſt, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli ſunt recti; Cuius quidem duo tantum ſunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli ſunt recti, vt perſpicuum eſt ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, ſi vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres neceſſario recti. Sit enim in parallelogrammo*

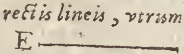
lelogrammo ABCD, *angulus A, rectus: Dico reliquos tres angulos* B, C, D, *rectos quoque eſſe. Nam cum parallelæ ſint*



29. primi A D, BC, *erunt anguli* A, & B, *interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus eſt, ex hypotheſi. Igitur et B, rectus erit. Quoniam vero quilibet ſuo oppoſito*
34. primi *eſt æqualis, vt angulus* A, *angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*

DICIT *itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ unũ eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis* AB, AD; *vel ſub* A D, DC; *vel ſub* DC, CB, *vel deniq; ſub* AB, BC; *quoniam qualibet huiuſmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt* A B, *uel* D C, *eius longitudinem; altera vero, ut A D, vel* B C, *eius latitudinem. Vnde expreſſis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiuſmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorſum ſecundum rectam* A D, *moueri in tranſuerſum, ita vt ſemper angulum rectum cum A D, conſtituat, donec punctum A. ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, ſi A D, ponatur moueri in tranſuerſum ſecundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo ſub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.*

ITAQVE *parallelogrammum rectangulum, quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum ſub rectis E, & F, contentũ, erit idem, quod parallelogrãmũ ABCD; quoniam latus A B, æquale eſt rectæ E, & latus A D, rectæ F.*



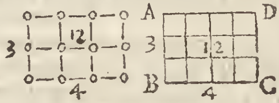
PERSPICVVM *eſt ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum ſub duabus lineis æqualibus eſſe quadratum; Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis ſit*

ſi lineæ oppoſitæ, erũt oĩa quatuor parallelogrãmi rectãguli latera æqualia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit. 34. primi.

Item *manifeſtũ eſt, ſi duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque vtrique, rectangulũ parallelogrãmum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſteriobus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiã ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ* A B B C, *æquales rectis* DE, EF *vtraq; vtriq;; Dico parallelogrammum rectangulum* A B C G, *contentũ ſub* AB, BC *æquale eſſe parallelogrammo rectãgulo* DEFH, *contento ſub* DE, EF. *Ductis etenim diametris* AC, DF, *cũ latera* AB, BC, *trianguli* ABC, *æqualia ſint lateribus* DE, EF, *triãguli* DEF; *& anguli* B, *&* E, *æquales, nempe recti, erunt triangula* ABC, DEF, *æqualia; Eadem ratione æqualia erunt* 4. primi *triangula* AGC, DHF: *Quare tota parallelogramma* ABCG, DEFH, *æqualia erunt.*

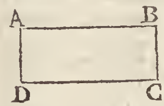


Habet *autem cõprehenſio hæc parallelogrammi rectanguli ſub duabus rectis lineis angulum rectũ continentibus, magnam affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterũ. Sicut enim ex multiplicatione* 3. *in* 4 *producitur numerus* 12. *qui in formã parallelogrãmi cõſtituitur, vnde et contineri dicitur ſub* 3. *&* 4: *Ita quoq; parallelogrãmũ rectangulũ* ABCD, *cõprehẽſum ſub duabus rectis* AB, BC. *quarũ illa ſit* 3. *palmorũ, hæc autẽ* 4 *cõſtat* 12. *palmis quadratis, q quidẽ ex ductu lineæ* AB, 3. *palmorũ in lineã* BC, -. *palmorũ pducuntur, vt figura indicat notumq; eſt Arithmeticis, atq; Geometris. Demõſtratur autẽ a Ioan. Regiomont. lib.* 1. *de triãgulis propos.* 16. *Hinc fit, vt nõnulli dicat, parallelogrãmũ rectãgulũ gigni ex ductu duarũ linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ* AB, *in lineã* BC, *vel (quod idem eſt) ex ductu lineæ* BC, *in lineam* AB. *Idem enim parallelogrammum procreatur, ſiue minor linea in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur*



producitur numerus, ſiue minor numerus in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4, quam ex 4. in 3 producitur hic numerus 12.

OBITER *quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc ſecundo libro, & in alijs, qui ſequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare ſimpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obſeruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum ſit parallelogrammum rectangulum.*

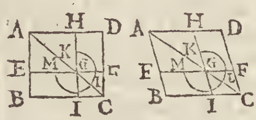


Rurſus, ne toties eædem literæ repetantur, ſolent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur; Vt ſuperius parallelogrammum appellant A C, *vel* B D.

II.

IN omni parallelogrammo ſpatio, unũquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

IN *Parallelogrammo* A B C D, *ſiue rectangulum illud ſit, ſiue non, ducatur diameter* A C, *ex cuius puncto quolibet* G, *ducantur rectæ* E F, H I, *parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuiſum ſit in quatuor parallelogramma, quorum duo* E H, I F, *dicuntur eſſe circa diametrum, alia vero duo* B G, G D, *complementa, vt manifeſtum eſt ex vltima definitione primi lib.*



Itaque figura compoſita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, ut ex I F, *vna cum duobus complementis* B G, G D, *qualis eſt figura* E B C D H G E, *quam complectitur circunferentia* K L M, *dicitur Gnomon. Eadem ratione figura* F D A B I G F, *compoſita ex parallelogrammo* E H, *circa diametrum, & duobus*

bus complementis B G, GD, *Gnomon appellabitur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C. quarum B C, ſecetur quomodocunque in quotlibet ſegmenta B D, D E, E C: Dico rectangulum ſub A, & B C, comprehenſum æquale eſſe omnibus rectangulis ſimul ſumptis, quæ ſub linea indiuiſa A, & quolibet ſegmento comprehenduntur, nempe rectangulo ſub A, & B D; Item ſub A, & D E; Item ſub A, & E C, comprehenſo.



Rectangulum enim B F, comprehendatur ſub A, & B C, hoc eſt, recta G B, æqualis ſit rectæ A; Quod quidem fiet, ſi erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipſi B G, uel C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ ſint ipſi B G, inter ſe quoque parallelæ erūt: Rurſus eædem, cum ex cōſtructione parallelogramma ſint B H, B I, æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis eſt rectæ A, erit rectangulum B H, comprehenſum ſub inſecta linea A, & ſegmento B D; Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehenſum ſub A, & ſegmento D E; Item rectangulum E F ſub A, & ſegmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia ſint toti rectangulo B F; perſpicuum eſt rectangulum comprehenſum ſub A, & B C, æquale eſſe rectangulis omnibus, quæ ſub A, et ſegmentis B D, D E, E C, compre-

30. primi *34 primi*

compreh͏ẽduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturq; ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

QVONIAM lib. 9. propoſ. 14. decem priora theoremata ſecundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonſtrabimus, ſi diuidantur, ut lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de lineis hic demonſtrantur, præſertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum reſpondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt ſupra diximus. Itaque propoſitis duobus numeris quibuſcunq;, vt 6. & 10. diuidatur poſterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem eſſe tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur, id quod perſpicuum eſt.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Cõmandinus duo alia theoremata, quæ iam ſequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ in quotcunque ſegmenta: Rectangulum cõprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis unius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum* A, *continentes, quæ ſecentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum ſub rectis* AB, AC, *cõprehenſum æquale eſſe rectangulis, quæ ſub AD,* AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB GH; FB, HC,



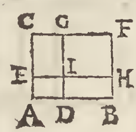
continentur. Cõpleatur rectangulũ AI, *ducanturq; DK, EL, FM, parallelæ ipſi* AC, *vel* BI: *Item HN, GO, parallelæ ipſi* AB, *vel CI; quæ ſecent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniã igitur rectangulum AS, cõtinetur ſub* AD, AG; *& G P ſub* A D, G H; *& HK, ſub* A D, H C; *(quod rectæ G S, H P, ipſi* AD, *ſint æquales:)* 34. primi

Item

Item rectangula DT, SQ, PL, continentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; *(quod DS, SP, PK, ipſis* AG, GH, HC, *æquales ſint, & ST, PQ, ipſi* DE *) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub* EF, AG; EF, GH, EF, HC; *Nec non rectangula FO, VN, RI, ſub* FB, AG; FB, GH; FB, HC; *perſpicuum eſt, rectangulum ſub* AB, AC, *æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus* AD, DE, EF, FB, *& quolibet ſegmentorum* AG, GH, HC, *comprehenſis. Quod eſt propoſitum.* 34. primi

SI ſint duę rectę lineę, ſecenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo ſub una parte unius, & una parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.

SINT duæ rectæ AB, AC, *angulum continentes rectum* A, *quæ ſecentur vtcunque in* D, *&* E; *Dico rectangulum comprehenſum ſub* AB, AC, *vna cum rectangulo comprehenſo ſub partibus* AD, EC, *æquale eſſe rectangulis contentis ſub* AB, EC; AC, AD; *vna cum rectangulo ſub* DB, AE, *comprehenſo. Compleatur rectangulum* AF, *agaturque per* D, *recta* DG, *ipſi* AC, *vel* BF, *parallela; nec non & per* E, *recta* EH, *ſecans* DG, *in* I, *parallela ipſi* AB, *vel* CF. *Quoniam igitur rectangulum* AF, *æquale eſt rectangulis* EF, DH, AI; *ſi addatur commune* EG, *erunt rectangula* AF, EG, *nempe ſub totis* AB, AC, *& partibus* AD, EC, *comprehenſa, æqualia rectangulis* EF, AG, DH, *ſub* AB, EC; AC, AD; DB, AE, *comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.*



IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. *&* 8. *quorum prior in tres partes*

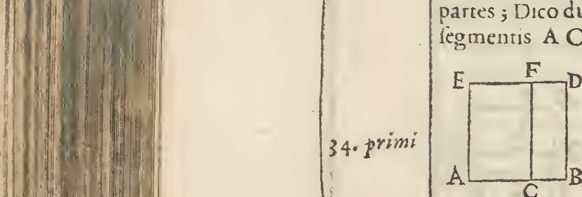
partes. 2. 3. 5. poſterior vero in duas 3 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; ſimul additi 80. vt volebat theorema 1 Federici.

RVRSVS, ſi iidem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoq; eſt 80. numerum productũ ex 10 in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6 æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

2.
THEOR. 2. PROPOS. 2.

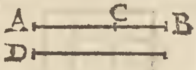
SI recta linea ſecta ſit utcunque, Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod a tota fit, quadrato.

RECTA linea A B, diuidatur utcunque in C, duas in partes; Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota A B, & ſegmentis A C, C B, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ A B. Deſcribatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F parallela rectæ A E, vel B D, quæ æqualis erit rectæ A E, hoc eſt, rectæ A B. *34. primi* Quoniam igitur recta A E, æqualis eſt rectæ A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C; ſimiliter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub A B, & ſegmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia ſint quadrato A D, perſpicuum eſt rectangula comprehenſa ſub A B, & ſegmentis A C, C B, æqualia eſſe quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea ſecta ſit utcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.



ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B, Quoniam

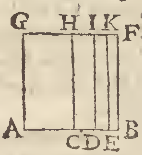
Quoniam igitur A B, diuiſa eſt in C, erit rectãgulum comprehenſum ſub inſecta D, & recta A B, nempe quadratum rectæ A B, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur ſub D, inſecta, hoc eſt, ſub A B, &, ſingulis ſegmentis A C, C B, quod eſt propoſitum.

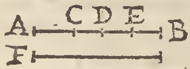


1. *ſecundi.*

SCHOLION.

QVANQVAM Euclides ſecundum hoc theorema proponat de linea recta diuiſa in duas tantummodo partes vtcunq;, idem tamen eiſdem medijs demonſtrabitur, ſi linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifeſtum eſt. In numeris vero idem perſpicitur hoc modo. Numerus 10. diuiſus ſit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales eſſe 100. quadrato ipſius numeri 10. vt manifeſtum eſt. Simili modo, ſi numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipſius numeri 10.

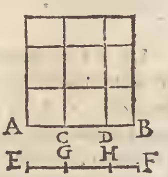




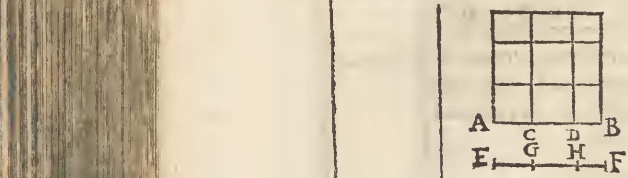
SIMILI modo demonſtrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta ſecetur in quotcumq; ſegmẽta: quadratum, quod a tota fit, ęquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta A B diuiſa in partes quotcunq; A C, C D, D B. Dico quadratũ ex A B, deſcriptum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub ſingulis partibus A C, C D, D B, & quolibet ſegmentorũ A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc eſt, rectangulis ſub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D,



L D B:



D B: D B, *A* C; D *B*, *C* D; D *B*, D*B*, *comprehenſis. Sumpta enim recta* E F, *quæ æqualis ſit ipſi* A B, *diuiſaq; in partes* E, G, G H, H F, *partibus* *A* C, C D, D B, *æquales; Erit ex ijs, quæ ad propoſ.* 1. *huius libri demonſtrauimus, rectangulum ſub* A B, E F, *hoc eſt, quadratum ipſius* A B *æquale rectangulis ſub* *A* C, *E G*; A *C*, *G* H; *A* C, *H F*: C D, *E G*; *C* D, G H; *C* D, *H F*: D *B*, *E G*; D B, *G H*; D *B*, H F. *Cum igitur partes* A C, *C* D, D *B*. *partibus E G, G H, H F, ſint æquales; Erit quoque quadratum ex* *A* B, *æquale rectangulis ſub* *A* C, A *C*; *A* C C D; *A* C, D B: C D, *A* C; C D, C D; C D, D B: D *B*, *A* C; D *B*, C D; D B, D B. *Quod eſt propoſitum.*

I N *numeris idem eſt manifeſtum. Si enim numerus* 10. *diuidatur in* 2. 3. 5. *erit* 100. *quadratus totius æqualis his nouem numeris* 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. *qui ex ſingulis partibus* 2. 3. 5. *in quamlibet partium* 2. 3. 5. *procreantur, vt perſpicuum eſt.*

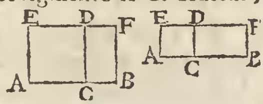
3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea ſecta ſit vtcunq; rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

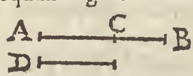
L I N E A recta A B, diuiſa ſit vtcunq; in puncto C: Dico rectangulum comprehenſum ſub tota A B, & vtrouis ſegmento, vt A C, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis A C, C B, comprehenſo, & quadrato prioris ſegmenti aſſumpti A C. Conſtituatur enim quadratū dicti ſegmenti A C, quod ſit A D, & ex

& ex B, educatur B F, parallela ipſi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectę A C, æqualis eſt ex quadrati definitione, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Rurſus, quia recta C D, eadem ratione æqualis eſt rectæ A C, erit rectangulum C F, comprehenſum ſub ſegmētis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F,



æquale ſit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido conſtat, rectangulum ſub A B, tota, & ſegmento A C, comprehenſum, eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis A C, C B, & quadrato prædicti ſegmenti A C. Itaq; ſi recta linea ſecta ſit vtcunq;, &c. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento AC. Quoniam recta A B, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehēſum ſub D, & A B, hoc eſt, ſub A B, & A C, æquale rectangulo ſub D, & C B, hoc eſt, ſub A C, C B, & rectangulo ſub D, & A C, hoc eſt, quadrato ſegmenti A C; quod eſt propoſitum. *1. ſecundi.*



SCHOLION.

Vt hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. *diuiſus in* 7. *&* 3. *Dico numerum* 70. *productum ex* 10. *in* 7. *æqualem eſſe numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *producitur, vna cum* 49, *quadrato prioris partis* 7. *Id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus* 30. *procreatus ex* 10. *in* 3. *æqualis numero* 21. *producto ex* 3. *in* 7. *ſimul cum* 9. *quadrato prædicti numeri* 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea ſecta ſit vtcunq; Quadratum, quod a tota deſcribitur, æquale eſt

& illis, quæ a ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA A B, diuiſa ſit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ A B, ęquale eſſe quadratis ſegmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis A C, CB. Deſcribatur ſuper A B, quadratum A D, ducaturq; diameter B E. Deinde ex C, agatur, C F, parallela rectæ B D, ſecans diametrum in G, puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectę A B; Eritq; quadratum A D, diuiſum in quatuor parallelogramma.



Quoniam igitur trianguli ABE, duo la-
5. primi. tera A B, A E, æqualia ſunt; erunt duo anguli ABE, AEB,
32. primi. æquales: Atqui tres anguli ABE, AEB, BAE, triãguli ABE,
duobus rectis ſunt ęquales; & BAE, rectus eſt: reliqui ergo
anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadē ratione oſtendes,
angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat
ex ijs, quæ ad 34. propoſ. lib. 1. demonſtrauimus. Nam, vt
ibi oſtēſum eſt, diameter B E, diuidit angulos rectos ABD,
32. primi. AED, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli EFG, ęqua
les ſunt duobus rectis; & angulus E F G, rectus eſt, cum ſit
29. primi. ęqualis recto D, externus interno; nec nō FEG, ſemirectus;
erit & reliquus EGF, ſemirectus, ideoq; ęqualis angulo FEG.
6. primi. Quare æqualia erunt latera EF, & FG; quæ cum ſint æqua
34. primi. lia oppoſitis lateribus GH, HE, erit parallelogrammū FH,
quadratum, cum omnia eius latera ſint æqualia, & omnes
anguli recti. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamob-
rem CI, FH, quadrata ſunt ſegmentorum A C, CB, quod
34. primi. H G, recta æqualis ſit rectę AC; & rectãgula AG, DG, com-
prehenſa erunt ſub ſegmẽtis AC, CB, propterea quod CG,
GI, ęquales ſint rectæ CB; & FG, æqualis rectæ GH, hoc eſt
rectæ A C. Quocirca cum quadratum AD, ęquale ſit qua-
dratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; conſtat quadratũ
AD, totius lineæ AB, ęquale eſſe quadratis ſegmentorum
AC, CB, & rectãgulo cōprehēſo ſub eiſdē ſegmẽtis AC, CB,
bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit vtcũq;, quadratum,
quod a tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

ALI-

Aliter. Quoniam recta A B, diuiſa eſt in C, erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quę ſub tota A B, 2. ſecundi.
& ſegmentis A C, C B, comprehē-
duntur: Rectangulum autem ſub

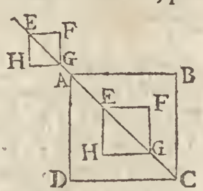


A B, & A C, comprehenſum, æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub A C, C B, & quadrato ſegmenti A C; Item rectangulum ſub A B, C B, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub C B, A C, comprehenſo, & quadrato ſegmēti C B. Igitur quadratum rectę A B, ęquale eſt quadratis ſegmentorum A C, C B; & rectangulis ſub A C, C B, & ſub C B, A C. quod eſt propoſitum. 3. ſecundi.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

Constat hoc ex priori huius theorematis demōſtratione, in qua oſtenſum eſt, rectangula C I, F H, quæ ſunt circa diametrū B E, eſſe quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonſtratio. Eſt tamen corollarium iſtud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiuſmodi ſunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilo minus verum eſt de quibuſcunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela ſint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, conſiſtat parallelogrammum F H, ſiue intra quadratum, ſiue extra, quod tamē habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, eſſe quadratum. Cum enim parallelæ ſint A B, E F, erunt anguli B A C. F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B CA, F G E, æquales erūt: Sunt autem anguli B A C, B CA, ſemirecti, vt oſtenſum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, ſemirecti erunt, proptereaq; latera E F, F G, illis oppoſita, æqualia, & angulus F, rectus. Quare cū E F, F G latera æqualia ſint oppoſitis lateribus G H, H E; erit F H, quadratum. Quod eſt propoſitum.



29. primi.
32. primi
6. primi.
34. primi

SCHOLION.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuiſus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale eſſe 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis ſumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem ex hoc theoremate demonſtrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſſe quadrati ex hac deſcripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa A B, bifariã in C, ſi fiat conſtructio, vt in theoremate; erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq; inter ſe æqualia, cum omnia eorũ latera ſint æqualia, vt facile demonſtrari poteſt ex propoſ. 34. lib. 1. omneſq; anguli recti. Quare cum quadratum A D, æquale ſit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C hoc eſt, lineæ K, quæ æqualis eſt ipſi A C. Eſt .n. vtraq; dimidia lineæ A B.



BREVIVS. Ex hac propoſitione, quadratum rectæ A B, æquale eſt quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo ſub rectis lineis A C, C B, bis comprehenſo. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia ſint; & rectangulum ſub æqualibus A C, C B, quadratum quoq; ſit, atq; æquale quadrato rectæ A C; Conſtat quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ A C, cum æquale ſit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ A C.

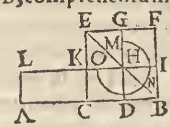
ECONTRARIO oſtendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſſe lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum eſſe lateris K. Nam diuiſa recta A B, bifariam in C, vt A B dupla ſit ipſius A C; erit, vt iam demonſtratum eſt, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum K, & A C, & ipſæ rectæ K, & A C, æquales. Eſt autem A B, ex conſtructione, ipſius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. lib. 6.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cũ quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod a dimidia deſcribitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt ſectionum intermedia recta ſit C D, qua dimidia C B, minus ſegmentum D B, ſuperat, vel qua maius ſegmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus A D, D B, comprehenſum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ C B. Deſcribatur enim C F, quadratum ſuper dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, ſecans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, ſecans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propoſ. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Eſt autem & K H, ipſi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur ſub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; eſt rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H. F H, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Eſt autem & A K, eidem C I, æquale, quod & baſes A C, C B, æquales ſint: Igitur D F, A K, æqualia inter ſe erunt; quibus ſi commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia ſint quadrato C F, erit & rectangulum



34. *primi.*

43. *primi.*

36. *primi.*

A H, vna cum quadrato A G, ęquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non ęqualia, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.



Aliter hoc theorema ex Fr... ciſco Maurolyco demonſtrabimus, hu... modo: Quia quadratum ex C B, æqua-
4. ſecundi. *le eſt quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis ſub C D, D B: Et rectangulo ſub C D, D B, vna cum quadrato ex D B,*
3. ſecundi. *æquale eſt rectangulum ſub C B, B D; Erit quadratum ex C B, æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangul... ſub C D, D B, & rectangulo ſub C B, B D, vel ſub A C, B D. Atqui rectangulis ſub A C, B D, & ſub C D, D B, æquale eſt*
1. ſecundi. *rectangulum ſub tota A D, D B. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo ſub A D, D B; hoc eſt, rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonſtrandū.*

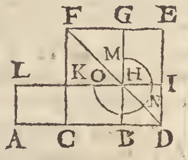
Idem in numeris eſt manifeſtum. Diuidatur enim numerus 10 æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter ſectiones ſit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. ſuperat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem eſſe 25. quadrato dimidij numeri 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale eſt quadrato a linea, quæ tū ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, deſcripto.

SECE-

Secetvr recta A B, biſariam in C, & ei in rectũ adiatur BD: Dico rectangulum comprehenſum ſub tota cõpoſita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale eſſe quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia CB, & adiecta B D, componitur. Deſcribatur namq; C E, quadratum ſuper C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, ſecans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A, ducatur



rectæ C F, parallela A L, ſecans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propoſ. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, ęqualis; Eſt autem &
K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, com- *34.primi.*
prehendetur ſub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; eſt, rectangulum AI, vna cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C E. Quoniam ergo
parallelogrammum A K, æquale eſt parallelogrãmo C H, *36. primi.*
quod baſes A C, C B, æquales ſint; Eſt autem & paralle-
logrammum H E, eidem C H, æquale, complementum *43.primi.*
complemento; erunt A K, H E, æqualia inter ſe. Addito ergo communi C I, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, ſint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; ſi recta linea biſariam ſecetur, & illi recta quædã linea in rectũ adijciatur, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLION.

Aliter idem oſtendemus ex Franciſco Maurolyco. Quia quadratum ex C D, æquale eſt



quadratis ex C B, B D, vna cum re- *4. ſecundi.*
ctangulo bis ſub C B, B D; hoc eſt, vna cum rectangulis ſub C B, B D, & ſub A C, B D. Eſt autem rectangulis ſub A C, D B; C B, D B; & ſub D B, D B, hoc eſt,
quadrato ex D B, æquale rectangulum ſub A D, D B. Igitur *1. ſecundi.*
quadratum ex C D, æquale eſt reliquo quadrato ex C B vna cũ rectan-

rectangulo ſub A D, D B: Hoc eſt, rectangulum ſub A D, DB, vna cum quadrato ex C B, æquale eſt quadrato ex C D. Quod demonſtrandum erat.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero compoſito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem eſſe 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

Ex hoc porro theoremate colligitur proprietas inſignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ conſiſtit in eodem ſemper exceſſu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, ſuperet C D, magnitudine A C, hoc eſt, C B; & C D; ſuperet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum oſtenſum ſit, rectangulum ſub extremis A D, B D, vna cum quadrato exceſſus C B, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ C D; perſpicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectãgulum ſub extremis contentum, vna cum quadrato exceſſus, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent exceſſum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem exceſſum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

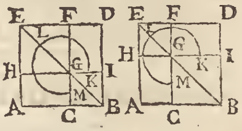


THEOR. 7. PROPOS. 7.

7. SI recta linea ſecetur vtcunq;; Quod a tota, quodq; ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato.

RECTA

Recta A B, ſecetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius A B,& quadratum ſegmenti ſiue maioris, ſiue minoris A C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota A B,& dicto ſegmento A C, vna cũ quadrato reliqui ſegmẽti C B. Deſcribatur.n.ſuper AB,quadratũ A D,& ducta diametro BE,ducatur ex C.recta CF, parallela rectæ A E,ſecãs diametrũ in puncto G, per q̃ agat̃ H I, parallela rectæ A B. Erunt igitur per corollariũ 4. propoſ. huius lib. CI, HF, quadrata,& quia recta G H, æqualis eſt rectæ A C,erit HF, quadratum ſegmenti A C. *34. primi.* Rurſus quia A E,ęqualis eſt ipſi A B, erit rectangulũ A F,cõprehenſum ſub tota AB, & ſegmẽto A C. Eadem ratione rectangulum H D,comprehenſum erit ſub eiſdẽ rectis A B, A C,quod rectæ DE,E H, æquales ſint rectis A B, A C. Quoniam igitur rectangulis A F, FI,hoc eſt, gnomoni K L M,vna cum quadrato C I, ęquale eſt quadratũ A D; ſi apponatur cõmune quadratũ H F, erũt quadrata A D,H F,æqualia rectangulis A F, D H, (quę comprehenduntur ſub tota A B,& ſegmento A C,) vna cum C I, quadrato reliqui ſegmenti C B. Si igitur recta linea ſecetur vtcunq;, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

Aliter ex Franciſco Maurolyco idem demonſtrabimus. Quia quadratum ex A B, æquale eſt quadratis ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B; ſi addatur commune quadratum ex A C, erunt quadrata ex A B, A C, æqualia quadratis ex A C, C B, A C, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B. Sed rectangulo ſub A C, C B, vna cum quadrato ex A C, æquale eſt rectangulum ſub A B, A C; Et proinde rectangulo bis ſub A C, C B, vna cum quadrato ex A C, bis, æquale eſt rectangulum ſub A B, A C, bis. Igitur quadrata ex A B, A C, æqualia ſunt reliquo quadrato ex C B, vna cum rectangulo bis ſub A B, A C. Quod demonſtrandum erat.

4. ſecundi.

3. ſecundi.



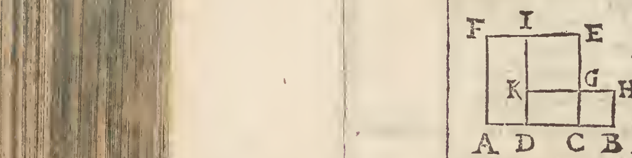
IN

In numeris autem, diuidatur numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales ſunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt conſtat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales ſunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cũ 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur: earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.

Secetvr recta A B, in partes inæquales A C, C B, ſitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea AD; vt D C, ſit exceſſus, quo pars A C, ſuperat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia eſſe rectangulo, quod bis continetur ſub A C, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Conſtituantur quadrata A E, CH; & agatur D I, ipſi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam AD, ipſi CB, eſt æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc eſt C E, toti DB, æqualis; Eſt autẽ & CG, ipſi CB, æqualis, quod quadratum ſit CH: Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E,



34. *primi.* ipſi DC, ſit æqualis; erunt GE, IE, æquales: ideoq; IG, quadratum erit ab exceſſu DC, deſcriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur ſub partibus AC, CB, (Eſt. n. AC, vtriq; lineæ AF, DB; & CB, vtriq; AD, BH, æqualis:) manifeſtum eſt, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia eſſe rectangulis AI, DH, quæ continentur ſub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, exceſſus DC. Quod eſt propoſitum.

SCHOLION.

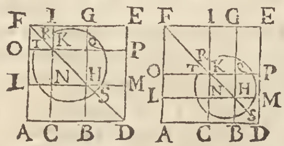
In numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita

ita vt maior pas ſuperet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16.36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales eſſe numero 24. qui fit ex 4. in 6. bis ſumpto, vna cum 4. quadrato exceſſus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8. — 8.

SI recta linea ſecetur vtcunq; Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorũ, cum eo, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod a tota, & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuiſa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub A B, & ſegmento ſiue maiore, ſiue minore C B, vna cum quadrato reliqui ſegmenti A C, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto ſegmento C B, componitur. Producatur A B, verſus dictum ſegmentum C B, ad D, ſitq; B D, recta æqualis ſegmento C B; & ſuper tota A D, quadratum deſcribatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipſi D E, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipſi A D, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propoſ. 4. huius lib. O I, N Q, B M, quadrata. Et quia O K, æqualis eſt rectæ A C, erit O I, *34. primi.*
quadratum ſegmenti A C: Rurſus quia N H, æqualis eſt *34. primi.*
rectæ C B, erit N Q, quadratũ ſegmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ C B, B D, æquales ſint. Quare rectæ B H, H Q, æquales ſunt ſegmento C B; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehenſa erunt ſub A B, & ſegmento C B, cum L H, ſit æqualis rectæ A B. Eadẽ rõne erũt duo *34. primi*
rectan-

rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB, cũ NH,
34. primi. HM, rectæ æquales ſint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc eſt, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, equalia ſunt; ſi addatur commune KG, erũt BM, KG, ſimul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta AB, & ſegmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia ſint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta AB, & ſegmento CB, vna cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento CB. Quãobrem, ſi recta linea ſecetur vtcunq;, &c. Quod demonſtrãdum erat.

SCHOLION.

ALITER idem ex Franciſco Maurolyco demonſtrabi-
4. ſecundi. *mus. Quia quadratũ ex* AD *æquale eſt quadratis ex AB,* BD, *vna cũ rectangulo ſub AB, BD, bis; hoc eſt, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC: Et quadrata ex AB, BC, æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratũ ex AD, æquale rectangulo quater ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonſtrandum erat.*



7. ſecundi.

SECETVR iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc eſt, numerus 256. æqualis eſt numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt conſtat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc eſt, numerus 196. æqualis eſt quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perſpicuum eſt.

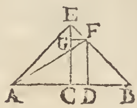
9.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & nõ æqua-

æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, duplicia ſunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

Secetur recta A B, biſariam in C, & non biſariam in D. Dico, quadrata ſegmentorum inæqualium A D, DB, dupla eſſe quadratorum, quę fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia ſectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ ſit æqualis dimidiæ A C, vel C B; Ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis D F, ſecans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipſi A B, ſecans C E, in G, ducaturq; AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera C A, C E, æqualia ſunt; erunt anguli C A E, C E A, æquales. Eſt autem angulus A CE, rectus; reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoq; AEC, ſemirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, ſemirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rurſus, quia trianguli F G E, angulus EG F, æqualis eſt recto E CB, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: oſtenſum autem eſt, angulum F E G, eſſe ſemirectum; igitur & E F G, ſemirectus erit, proptereaque cum anguli F E G, F G E, æquales ſint, erunt & latera E G, G F, æqualia inter ſe. Eodem modo oſtendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, eſſe æqualia; nam angulus F D B, eſt rectus, & B, ſemirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus ſit, erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E; Atqui hæc duo quadrata inter ſe ſunt æqualia; quod & lineæ A C, C E, æquales ſint; Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rurſus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus eſt, erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F; At duo hæc quadrata inter ſe æqualia ſunt, ob æqualitatem linearum E G, G F; Igitur



5.primi.

32.primi.

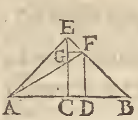
29.primi.

32.primi.

6.primi.

47.primi.

47.primi.



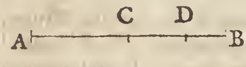
34. *primi.* Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G, hoc eſt, quadrati lineę C D; Eſt enim C D, recta rectæ F G, æqualis, cum C F, ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F, dupla ſunt duorum quadratorum linearum rectárum A C, C D.

47. *primi.* Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale

47. *primi.* duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla ſunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale eſt quadrato rectæ D B; oſtenſum enim eſt, rectas D F, D B, eſſe æquales. Quare duo quoq; quadrata rectarum A D, D B, ſegmentorum inæqualium, dupla ſunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Aliter ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipſi C B, æqualis eſt, & ſuperat C B, ipſam C D, recta D B; ſuperabit quoq; A C, ipſam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propoſ. huius lib. demonſtrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia ſunt rectangulo ſub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum ſub A C, C D, bis vna cum quadrato rectæ D B, dupla ſunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo



4. *ſecundi.* *ſub A C, C D, bis, eſt æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D.*

Aliter ex Franciſco Maurolyco. Quia quadratum ex

4. *ſecundi.* *linea recta A D, deſcriptum æquale eſt quadratis deſcriptis ex A C, C D, vna cum parallelogrammo rectangulo bis ſub rectis A C, C D, comprehenſo; ſi commune ponatur quadratum ex D B, erunt quadrata ex A D, D B, æqualia quadratis ex A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C D,* vel

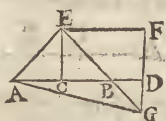
vel ſub B C, C D, Atqui quadrato ex D B, *vna cum rectangulo, bis ſub B C, C D, æqualia ſunt quadrata ex* B C, *ſeu* A C, *& ex C D. Quadrata igitur ex* A D, D B, *æqualia ſunt bis quadratis ex* A C, C D; *Ac propterea quadrata ex* A D, DB, *dupla ſunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod oſtendendum erat.* 7. *ſecundi.*

I A M vero rurſus numerus, 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt ſit intermedia ſectio numerus 2. ceu in propos. 5. eſt dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli ſunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas ſectiones, vt manifeſtum eſt.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

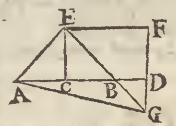
SI recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque ſimul quadrata, duplicia ſunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, deſcriptum ſit, quadrati.

S E C E T V R recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, B D, dupla eſſe quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, deſcribuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ ſit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur DF, ipſi C E, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G; & per E, ducatur rectę C D, parallela E F, ſecans D F, in F, iungaturque recta A G. Oſtendetur iã, angulum A E B, eſſe rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, ſemirectum; ideoque eius alternum E G F, ſemirectum quoque: Eſt autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo 29. *primi* 34. *primi*



lelogrammo C F, recto angulo C, opponatur, Igitur & reliquus F E G, ſemirectus erit, & propterea ipſi EGF æqualis. Quare rectæ E F, FG, & angulis FEG, EGF, oppoſitę, æquales erunt. Eadem arte oſtendes, rectas B D, D G eſſe æquales, propterea quod angulus B D G ſit rectus, & BGD, ſemirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale eſt quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ AC.

32. primi
6. primi
47. primi

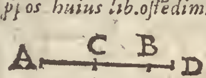


Rurſus quia quadratũ rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, FG, æquale eſt; erit quoque quadratum rectæ E G, duplũ quadrati rectæ E F, hoc eſt, rectæ CD, cum C D, recta æqualis ſit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla ſunt quadratorum ex rectis A C, C D, deſcriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale eſt quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia ſunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus AD, DG, deſcibuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla ſunt quadratorum ex rectis A C, C D, deſcriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale ſit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, deſcribuntur. Itaque ſi recta linea ſecetur biſariam, &c. Quod oſtendendum erat.

47. primi
34. primi
47. primi

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, *ipſi* CB, *eſt æqualis, & ſuperat* C D, *ipſam* CB, *recta* B D; *superabit quoque* CD, *ipſam* A C, *eadem recta* B D. *Quare, vt ad 7. ppos huius lib. oſtẽdimus, quadrata ex* A C, CD, *æqualia ſunt rectangulo ſub* A C, C D, *bis, vna cum quadrato rectæ* B D; *Ac propterea quadrata rectarũ* A C, CD, *& rectangulum ſub* A C, CD, *bis, vna cum quadrato rectæ* B D, *dupla ſunt quadratorum ex* A C, CD; *Atqui quadratis rectarũ* A C, CD, *vna cũ rectangulo ſub* A C, C D, *bis, æquale eſt quadratum rectæ* A D. *Igitur & quadrata rectarũ* A D, B D, *dupla ſunt quadratorum ex* A C, C D.



4. ſecundi

ALITER

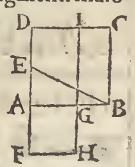
Aliter ex Franciſco Maurolyco. Quia quadratū ex AD, *æquale eſt quadratis ex* A C, C D, *vna cū rectangulo bis ſub* A C, C D, *vel ſub* B C, C D; *ſi commune addatur quadratū ex* B D, *erunt quadrata ex* A D, B D, *æqualia quadratis ex* A C, CD, BD, *vna cū rectangulo bis ſub* BC, CD. *Sed quadrato ex B D, vna cū rectangulo bis ſub B C, C D, æqualia ſunt quadrata ex C D, BC, hoc eſt, quadrata ex A C, CD. Igitur quadrata ex* A D, B D, *æqualia ſunt quadratis ex* A C, C D, *bis; Ac proinde quadrata ex* A D, B D, *dupla ſunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod erat demonſtrandum.* 4. *ſecundi* 7. *ſecundi*

Nvmervs 10 bifariam ſecetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus cōpoſitus ſit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9 horum numerorū 13. & 3. dupli ſunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perſpicuum eſt.

PROBL. 1. PROPOS. 11. 11.

DATAM rectam lineam ſecare, ut cōprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorū rectangulum, æquale ſit ei, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato.

Data ſit recta A B, quam ſecare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cōprehenſum ſub tota A B, & minori eius ſegmento, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti maioris. Deſcribatur ex A B, quadratū A C, & diuiſo latere A D, quod cū linea data A B, angulū rectū efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis ſumatur E F; & ipſi A F, abſcindatur ex recta A B, data æqualis A G. Dico rectam A B, ſectā eſſe in G, ita ut rectangulum comprehenſum ſub A B, & B G, æquale ſit quadrato rectæ A G. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, ſecans C D, in I; Ac per F, ducatur ipſi A G, parallela F H, ſecans H I, in H. Erit igitur parallelogrāmum A H, quadratum ſegmenti A G, cum omnia eius quatuor latera ſint 34. *primi*



æqualia; & rectangulum C G, comprehenſum ſub A B, & ſegmento B G, quod A B, æqualis ſit ipſi B C. Itaque probandum eſt, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia eſſe. Quoniam igitur recta D A, diuiſa eſt bifariam in E, & ei addita in rectum



6. ſecundi A F, erit rectangulum ſub D F, F A, hoc eſt, rectangulum D H, (cum F H, ſit æqualis ipſi F A;) una cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc eſt, quadrato rectæ E B; quæ rectæ E F, æqualis eſt: Eſt autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum A E, A B: Quare rectangulum D H, vna cũ quadrato rectæ A E, æquale eſt quadratis rectarum A E, A B: Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc eſt, quadrato A C. Ablato igitur rurſus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter ſe æqualia. Quod eſt propoſitum. Datam igitur rectam A B, ſecuimus, &c. Quod erat faciendum.

(47. primi)

SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione accommodari poteſt numeris. Non enim numerus vllus in duos numeros diuiditur, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis ſit quadrato alterius partis, ut demonſtrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonſtrabimus.

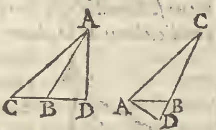
12.

THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt a lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo & ab uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtuſum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuſo angulo opponitur, maius eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, B D, hoc eſt, quadratum lateris A C, æquale eſſe duobus quadratis laterum A B, B C, una cũ rectangulo ſub C B, B D, bis comprehenſo. Cum enim recta C D, diuiſa ſit in B, vtcunque, erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarũ C B, 4 ſecundi.



B D, & rectangulo cõprehenſo bis ſub CB, B D. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum CD, D A, æqualia tribus quadratis rectarũ CB, B D, D A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D: Eſt aũt quadratis rectarũ CD, DA, æquale quadratũ rectæ AC; Quare & qua- 47. primi
dratũ rectæ AC, æquale erit tribꝰ quadratis rectarũ CB, BD, D A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Cum
igitur quadratis rectarum B D, D A, æquale ſit quadratum 47. primi
rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum C B, B A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Quod eſt propoſitum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

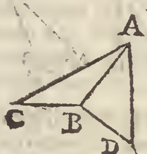
QVONIAM aſſumpſit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtuſi protractum, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus A B C, obtuſus, & latus C B, ad partes B, protractũ; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulũ in latus C B, protractum, cuiuſmodi eſt recta A D. Si enim

caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli A B E, A E B, duobus rectis maiores cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus: Quod eſt contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis eſt recta A F, eſſent rurſus in triangulo ABF, *duo anguli* A B F, A F B, *maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum.*



CONVERSVM *quoque huius theorematis ita oſtendemus. In triangulo* A B C, *quadratum lateris* A C, *maius ſit quadratis laterum* A B, BC; *Dico angulum* B, *quem dictum latus ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex* B, *ad* A B *perpendicularis* B D, *lineæ* B C, *æqualis, iungaturq́; recta* A D.

47. primi *Quoniam igitur quadratũ ex* A D, *æquale eſt quadratis ex* A B, BD, *hoc eſt ex* A B, BC; *Ponitur autẽ quadratũ ex* A C, *maius quadratis ex* AB, BC: *Erit quadratũ ex* A D, *minus quadrato ex* A C, *& idcirco recta* A D, *minor quã recta* A C. *Itaque quia latera* AB, BC, *triãguli* ABC, *æqualia ſunt lateribus* AB, BD, *trianguli* ABD, *vtrumq; vtriq;, & baſis* A C, *maior eſt baſe* A D; 25. primi. *Erit angulus* ABC, *maior angulo* A B D: *ſed* A B D, *rectus eſt. Igitur* ABC, *recto maior, & obtuſus erit.*

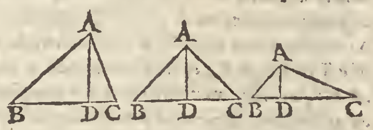


13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triãgulis, quadratũ a latere angulũ acutũ ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulũ cõprehendentibus, rectangulo bis comprehẽſo, & ab uno laterum, quæ ſunt circa acutũ angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demiſſa cadat in latus B C. Dico quadratũ lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus eſſe quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum lateris A B, una cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe duob' quadratis laterũ A C, C B. Cum enim recta B C, diuiſa ſit in D, utcunque, erunt quadrata rectarũ B C, C D, æqualia rectangulo cõprehenſo bis ſub B C, C D, & quadrato rectæ B D. 7. ſecundi

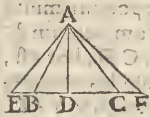


Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectãgulo bis cõprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarũ B D, D A: Duobus autem quadratis rectarũ C D, D A, æquale eſt quadratum rectæ C A; Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cũ ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, æquale ſit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & quadrato rectæ A B quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc eſt, quadratum lateris A C, minus eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo cõprehenſo bis ſub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonſtrandum erat. 47. primi 47. primi

SCHOLION.

QVAMVIS *Euclides theorema hoc proponat de triãgulis dũtaxat oxygonijs, quæ ſcilicet oẽs angulos habẽt acutos; Idẽ tamen verum eſt in triangulis rectangulis & amblygonijs, vt conſtat ex poſterioribus duobus triangulis in ſchemate propoſitis. Sunt enim in hiſce triangulis neceſſario duo reliqui anguli acuti, vt perſpicue colligi poteſt ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc ſolum obſeruandum eſt in triangu-*

lis rectangulis, & amblygonijs perpendicularem duci debere ab angulo recto; vel obtuſo; in oxygonijs vero a quolibet.

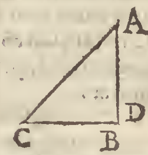


Ita enim ſemper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonſtratione aſſumpſit. Quod quidem facile demonſtrabitur hac ratione. Sint enim in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtuſus, acutus ve. Dico perpendicularem ex A, demiſſam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiuſmodi eſt recta A E; eſſet in triangulo A B E; angulus exterior

16. primi A B C, acutus, maior interno & oppoſito recto A E B, quod eſt abſurdum. Si vero caderet extra in B C, productam ad partes C, qualis eſt recta A F, in idem incideremus abſurdum, vt manifeſtum eſt.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtuſangulis demonſtrat Federicus Commandinus, etiam ſi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, ſed vel eadem ſit, quæ latus A C, vt in rectangulis, vel extra triangulū cadat, vt in obtuſangulis accidit, ceu in ſcholio propos. præcedentis demõſtrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuſo, ſed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulū rectangulū ABC, cuius angulus B, ſit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadē erit, quæ latus A B, propter angulū rectū B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulū C, ſubtendentis, minus eſſe, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & ſub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim

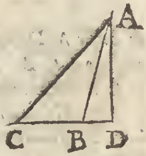


47. primi quadrata ex A B, C B, æqualia ſint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem eſt, quod rectangulum ſub C B, C D, Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis ſub C B, C D, æquale eſt quadratis ex A C, CB; Ac proinde quadratum ex A B, minus eſt, quam quadrata ex

AC, CB, rectangulo bis ſub C B, C D. *Quod eſt propoſitum.*

R V R S V S ſit triangulum obtuſangulum A B C, cuius angulus B, obtuſus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, ſubtendentis, minus eſſe, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, & C D. Quoniam quadrata ex A D, C D, æqualia ſunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, cõmuni, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, æquale eſt quadratis ex CB, B D, & rectangulo bis ſub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, CB, vna cũ quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis ſub C B, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, æqualia quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis ſub C B, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vna cum rectangulo ſub C B, B D, æquale eſt rectangulum ſub C D, C B; Ac propterea duplo quadrati ex ex C B, vna cum rectangulo bis ſub C B, BD, æquale eſt rectangulum bis ſub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis ſub C B, C D, æquale eſt quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus eſt, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis ſub C B, C D. *Quod eſt propoſitum.*

47. primi



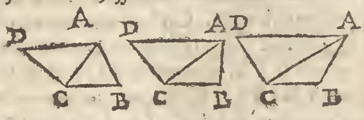
4. ſecundi

47. primi

3. ſecundi

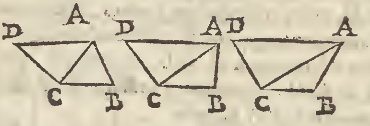
C O N V E R S V M quoque huius theorematis in quodam antiquo ſcholio demonſtratur in hunc fere modum.

I N triangulo quocunque A B C, quadratum lateris A B, minus ſit, quam quadrata laterum A C, C B. Dico angulũ C, quem dictum latus ſubtendit, eſſe acutum. Ducatur enim ex C, ad A C perpendicularis C D, lineæ C B, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, æquale eſt quadratis ex A C CD hoc eſt, ex A C, C B; Ponitur autem quadratum ex AB, minus-



47. primi

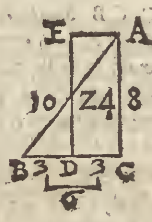
nus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B, & ideo recta AD, maior quam recta A B.



Itaque quia duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrunque vtrique: & baſis A D, maior baſe A B: Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C B, rectus eſt, ex conſtructione: ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

25. primi

Ex his autem, quæ in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inueniemus. Sit primo triangulum rectangulũ



A B C, cuius latera nota ſint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. BC, 6. Diuiſo latere B C, bifariam in D, vt ſit C D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod æquale eſt triangulo A B C, vt in ſcholio propos. 41. lib. 1. oſtendimus. Quia vero ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, æquale. Quod eſt propoſitum.

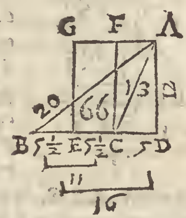
Sit ſecundo triangulum obtuſangulum A B C, cuius latera ſint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda eſt quantitas perpendicularis lineæ A D, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, maius

12. ſecundi

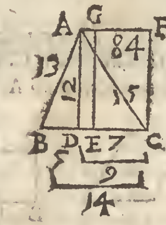
eſt, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D; ſi quadrata laterum A C, BC, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum ſub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum ſub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demon-

ſtrat

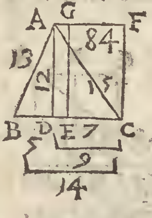
ſtrat propoſ. 17. lib. 1. de triangulis. *Quia vero quadrata laterum* A D, C D, *æqualia ſunt quadrato lateris* A C; *ſi* 47. primi
quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. *palmorum nuper inuenti, auferatur ex* 169. *quadrato lateris* A C, *remanebunt* 144. *palmi pro quadrato lateris* A D. *Quare latus* A D, *erit* 12. *palmorum, cum radix quadrata huius numeri* 144 *ſit* 12. *Itaque diuiſo latere* B C, *biſariam in* E, *educantur ex* C, E, *ad* B D, *perpendiculares* C F, E G, *occurrentes rectæ* A G, *quæ per* A, *ipſi* B D, *parallela ducitur, in punctis* F, G. *Quibus peractis, ſi* E C, *palmorum quinque cum dimidio, ducatur in* C F, 12. *palmorum.* (*Eſt enim* C F, *ipſi* A D, *æqualis,*) *exurget area rectanguli* 34. primi
C G, 66. *palmorum, quod cum æquale ſit triangulo* A B C, *ex ſcholio propoſ.* 41. *lib.* 1. (*ſunt enim rectangulum* C G, & *triangulum* A B C, *in eiſdem parallelis*) *Erit quoque area trianguli* A B C, *palmorum quadratorum* 66. *quod eſt propoſitum.*



SIT *poſtremo triangulum acutangulum* A B C, *latera habens nota;* A B, 13. *palmorum;* A C, 15. B C, 14. *Primũ igitur hic quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis* A D, *hac ratione: Quoniam quadratum lateris* A B, *minus* 13. ſecundi
eſt, quam quadrata laterum A C, B C, *rectangulo comprehenſo bis ſub* B C, C D; *ſi quadratum lateris* A B, *nimirum* 169. *detrahatur ex quadratis laterum* A C, B C *hoc eſt, ex* 225. 169. *quæ efficiunt* 421. *remanebunt* 252. *pro rectangulo cõprehenſo bis ſub* B C, C D, *cuius numeri dimidium* 126. *dabit rectangulum ſub* B C, C D *Si igitur* 126. *rectangulum ſub* B C, C D, *diuidatur per* B C, *latus notum, ut per* 14; *exibit reliquum eius latus* C D, *palmorum* 9. *ut conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propoſ.* 17.
Quoniam autẽ quadrata ex A D, C D, *æqualia ſunt quadrato* 47. primi
ex A C; *ſi quadratum* 81. *palmorum, nempe lateris* C D, 9. *pal-*



9. *palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. ſit 12; erit latus A D, 12. palmorum. Itaque diuiſo latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipſi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, ſi C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (eſt enim E G, recta ipſi* A D, *æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum*



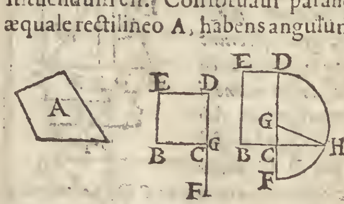
triangulo A B C, *ſit æquale, ex ſcholio propos. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum E F, & triangulum* ABC *in eiſdem parallelis) erit quoque area trianguli* A B C, *84. palmorum. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE in uniuerſum, area cuiuſcunque trianguli producitur ex dimidio baſis in perpendicularem, quæ a vertice ad baſim demittitur, ceu in exemplis datis eſt manifeſtum.

14. PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum conſtituere.

SIT datum rectilineum **A**, cui quadratum æquale conſtituendum eſt. Conſtituatur parallelogrammum BCDE, (45. primi) æquale rectilineo **A**, habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut D C, producatur ad F, ſitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidaturque D F, bifariã in puncto G, quod cadet aut in punctũ



C, aut nõ. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, æqualia (34. primi) ſint

ſint oppoſitis lateribus B C, C D; atque adeo conſtitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nõ cadit in C; facto G, centro, deſcribatur interuallo G D, uel G F, ſemicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam ſecet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, eſſe ęquale rectilineo A. Ducatur enim recta G H. Itaq; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectãgulum comprehenſum ſub D C, C F, hoc eſt, rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadrato rectæ G F, hoc eſt, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, ſint æquales: At quadratum rectæ G H, æquale eſt quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc eſt, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum conſtituimus: Quod facere oportebat.

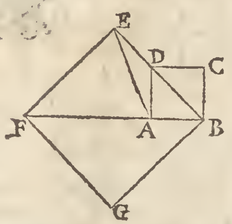
5. ſecundi

47. primi

SCHOLION.

QVONIAM in ſecundo hoc libro Euclides de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis diſputauit; recte inſeri hic poterit ſequens problema de quadrato nõ iniucundum, ad hunc modum.

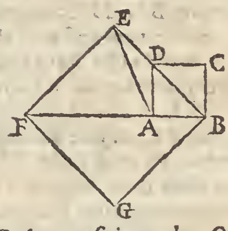
DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem; Inuenire latus ipſius quadrati.



EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiuſdem recta A B. inueniendumq; ſit latus illius quadrati. Ex recta A B, *deſcribatur quadratum* A C, *cuius diameter ducta* BD, *producatur ad E, vt ſit D E, recta rectæ* A D, *æqualis. Dico rectam B E, eſſe latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipſum latus B E, exceſſu dato* AB.

Ducatur

Ducatur enim EF, perpendicularis ad B E, quæ rectam BA, productam ſecet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus eſt, & EBF, ſemirectus; erit & BFE, 32. primi



ſemirectus. Quare recta BE, FE, æquales ſunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipſi BE; & ex B, recta BG, parallela ipſi EF, occurrens priori in G; conſtitutum erit quadratũ rectæ BE. Quod ſi ducatur recta AE, erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppoſiti æquales. Quare ſi demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, æquales, ideoque rectæ EF, AF. æquales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, ſuperat data recta AB; ſuperabit eadẽ diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB; quod eſt propoſitum. 6. primi 5. primi 6 primi

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS

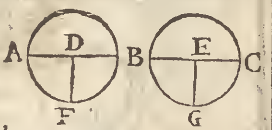
EVCLIDIS
ELEMENTVM III.

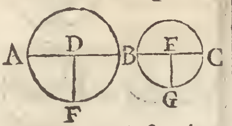
DEFINITIONES.

I.

AEQVALES circuli ſunt, quorũ diametri ſunt æquales; uel quorum, quæ ex centri^s, rectæ lineæ ſunt æquales.

*Q*VONIAM *Euclides in hoc 3. lib. uarias circuli proprietates demonſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens futurus eſt uſus in hoc lib. Primo itaque docet eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, uel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterũ extremũ fixum, & immobile, ceu in 1. lib. diximus, perſpicuũ eſt eos circulos eſſe æquales, quorũ ſemidiametri, ſeu rectæ ex cẽtris ductæ, ſũt æquales; uel etiã quorũ totæ diametri æquales ſunt. Vt ſi diametri AB, BC, uel rectæ DF, EG, e centris D, & E, ductæ ſint æquales, æquales erunt circuli* A F B, & BGC. *Sic etiam ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet*





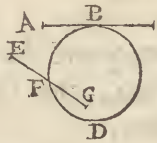
circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris ſunt inæquales;

quales, inæquales eſſe; atque adeo illum, cuius diameter, vel ſemidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

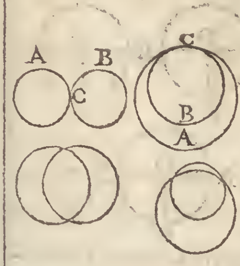
Vt recta AB, *quia ita circulum* BFD, *tangit in* B, *vt producta ad* C, *nulla ratione circulum ſecet, ſed tota iaceat extra ipſum, dicitur tangere circulum. At vero recta* EF, *quia ita eundem circulum tangit in* F, *vt producta ad* G, *ſecet circulum, cadatque intra ipſum, non dicitur circulum tangere, ſed ſecare.*



III.

CIRCVLI ſe ſe mutuo tangere dicuntur, qui ſe ſe mutuo tangentes, ſe ſe mutuo non ſecant.

Eodem modo duo circuli A C, B C, *ſe mutuo dicuntur tangere in* C, *quia ita ſe ſe contingunt in* C, *vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius ſe ſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus; aut interius, quando vnus intra alterum conſtituitur. Quod ſi duo circuli ita ſe mutuo tangant, vt vnus alterum quoque ſecet, dicentur circuli illi ſe mutuo ſecare, & non tangere.*

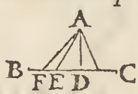


IIII.

IIII.

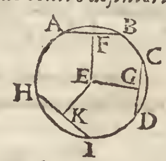
IN circulo æqualiter diſtare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuiſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem; aliæ vero infinitis modis variari poſſunt; recte diſtantia illius puncti a linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt diſtantia puncti A, a recta B C, dicitur eſſe perpendicularis A D, *non autem* A E, *vel A F, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis eſt; quia A D, omnibus eſt breuior, quod angulus* AED, *vel A* F D, *minor ſit angulo recto* A D E. *Immo non ſolum A E,* A F, *maiores ſunt quam A D, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim A* F, *maior, quam* A E, *cum angulus A* E F, *ſit obtuſus, Et* A F E, *acutus, & ſic de aliis lineis non perpendicularibus. Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A* B, *C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur diſtare a centro E, ſi perpendiculares E* F, *E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abeſſe dicetur a centro E, quam linea H I, ſi perpendicularis* E G, *maior fuerit perpendiculari E K.*



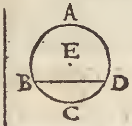
19.primi.

19.primi.



V.

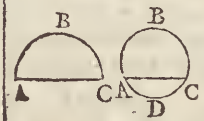
SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



Vt ſi ducatur in circulo A B C D, *recta* B D, *vtcunq;, dicetur tam figura* A B D, *contenta circunferentia* B A D, *& recta* B D; *quam* B C D, *comprehenſa recta* B D, *& circunferentia* B C D, *circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentum, Semicirculus, quando recta* B D, *per centrum* E, *incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta* B D, *non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum* B A D; *Et Segmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmẽtum* B C D. *Vocatur a pleriſq; Geometris recta* BD, *chorda, & circunferentia* B A D, *vel* B C D, *arcus.*

VI.

SEGMENTI autẽ angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



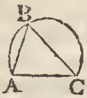
Definit iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis conſiderantur; Primo angulum ſegmenti, dicens, angulum mixtũ B A C, *vel* B C A, *contentum ſub recta linea* A C, *& circunferentiã* A B C, *appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentum circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi: Si vero ſegmentum maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si deniq; ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.*

VII.

IN ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quod-

quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

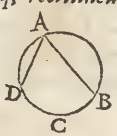
Sit ſegmentum circuli quodcunq; A B C, cuius baſis recta A C: Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur exiſtere in ſegmento A B C.

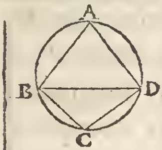


VIII.

CVM vero comprehendentes angulũ rectæ lineæ aliquam aſſumũt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

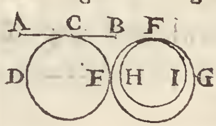
Ex puncto A, quolibet ſuſcepto in circunferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circunferentiæ B C D, cuiuſque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, aſſumunt. Angulus itaq; rectilineus B A D, inſiſtere dicitur circunferentiæ B C D. Perſpicuum autem eſt, hunc angulum a præcedenti non differre, niſi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur eſſe in ſegmento B A D, ſi recta B D, baſis duceretur; ex hac vero inſiſtere circunferentiæ B C D. Non tamen confundendus eſt angulus in ſegmento aliquo, cum angulo, qui circunferentiæ inſiſtit, quamuis vnus & idem ſit; ad diuerſa ſiquidem referuntur. Angulus enim in ſegmento, ſegmentum, in quo exiſtit, angulus autem inſiſtens circunferentiæ, circunferentiam, quæ baſis eſt ipſius anguli, reſpicit. Vnde ſi ſumatur





ſegmentum aliquod circuli BCD, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc ſegmento exiſtens, & eius circunferentiæ inſiſtens. Angulus enim in eo exiſtens, erit B C D; at eius circunferentiæ C B D, inſiſtens, erit B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in ſegmento, & angulus circunferentiæ cuipiam inſiſtens, ad diuerſos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propoſ. lib. 6. quæ ſolum conuenire poteſt circunferentijs circulorum, quibus anguli inſiſtunt, non autem, in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoq; facile conſtat ex verbo græco βεβηκέναι, quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit enim angulus D A B, ſupra circunferentiam C B D.

PRAETER tres dictos angulos cōſideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circunferentia circuli; vel certe duabus circunferentijs ſe mutuo tãgentibus, ſiue hoc exterius fiat, ſiue interi⁹.



Exemplum. Si recta A B, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus A C D, vel C B E. dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus C E D, tangat circulum EFG, exterius in E: Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus C E F, quã EFH, vel G F I, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaq;, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.

I X.

SECTOR autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a peri-

pheria

pheria ab illis aſſumpta.

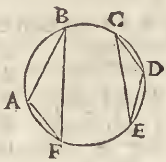
SI in circulo A B C D, *cuius centrum E, rectæ* A E, C E, *conſtituant angulum* A E C, *ad centrum E; nominabitur figura* A E C D, *contenta rectis* A E, E C, *& circunferentia* A D C, *quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perſpicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circunferentiam, quæ ipſius baſis eſt, non autem ad eam, in qua exiſtit, vt multi interpretes exiſtimarunt. Nam ſicut in hac definitione Euclides intelligit circunferentiam* A D C, *quæ baſis eſt anguli ad centrum conſtituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis* A E, C E, *aſſumptæ: Ita quoq; in illa intellexiſſe eum neceſſe eſt nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ aſſumunt, eam, quæ baſis eſt anguli ad circunferentiam conſtituti; quandoquidem in vtraq; definitione vſus eſt eodem verbo græco* ἀπολαμβάνω.



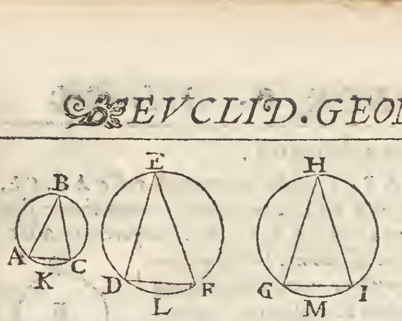
X.

SIMILIA circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.

SEGMENTA, *ſeu circunferentiæ* A B D F, D C A F, *quæ capiunt hos duos angulos* A B F, D C E, *æquales: vel, quod idem eſt, in quibus ijdem anguli æquales exiſtunt, iuxta 7. definitionem, ſimiles dicuntur.*



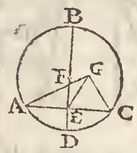
EODEM *modo ſegmenta diuerſorũ circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur ſimilia, quæ vel ſuſcipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli exiſtunt. Vt ſi anguli* A B C, D E F, G H I, *fuerint æquales, dicentur ſegmenta, ſeu circunferentiæ* A B C, D E F, G H I, *quæ dictos angulos ſuſcipiunt, vel in quibus prædicti anguli exiſtunt, ſimiles. Conſiſtit autem hac*



ſegmentorũ, circunferentiarũue ſimilitudo in eo, quod qualis pars eſt vna circunferentia totius ſuæ circunferentiæ, talis quoque ſit altera circunferentia, quæ dicitur huic ſimilis, totius ſuæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars eſt circunferentia A B C, totius circunferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars ſit circunferentia D E F, totius circunferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferentiæ G H I G. Vel potius ſegmentorum ſimilitudo in hoc conſiſtit, quod ſegmenta, ſeu circunferentiæ ſimiles, ad totas circunferentias ſuas eandem habeant proportionem. Quod autem ſegmenta, quæ vel æquales ſuſcipiunt angulos, vel in quibus exiſtunt æquales anguli, ſint huiuſmodi, demonſtrabimus propoſitione vltima lib.6. Nunc ſatis ſit, talia ſegmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiaſue, appellari ſimiles.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, quę biſariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D. Hac igitur biſariam ſecta in F; dico F, eſſe centrum circuli propoſiti. In ipſa enim recta B D, aliud punctum, pręter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipſam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuiſa fuit æqualiter. Si igitur F, non eſt centrum, ſit punctum G, extra rectam BD, centrum, a quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C EG; & baſis A G, baſi C G; (a centro

centro enim ducuntur) erunt anguli A E G, C E G, ęqua- 8.primi.
les, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex conſtructione; Igitur recti A E F, A E G, æquales ſunt, pars & totum. quod eſt abſurdum. Non eſt ergo punctum G, centrum; eademq; eſt ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

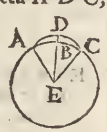
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam biſariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante eſſe centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, biſariam ſecat in E, & ad angulos rectos, oſtenſum fuit, punctum eius medium F, neceſſario eſſe circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2. 2.

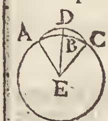
SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo A B C, ſumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circunferentia: Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipſum ſecet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis eſt linea A D C, recta. In-
uento igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta aſſumpta 1. tertij.
A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, ſecetq; E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius baſis ponitur recta A D C, ęqualia ſunt, (e centro enim
ducuntur) erunt anguli E A D, E C D; 5. primi.
æquales: Eſt autem angulus E D A, angulo E C D, 16.primi.
maior, externus interno oppoſito, cum latus C D, in triangulo E C D, ſit productum ad A. Igitur



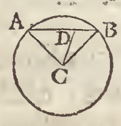
 &an-

& angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo oppoſita, hoc eſt, recta
19. primi. E B, ſibi æqualis, maior erit, quam recta E D, pars quam totum, Quod eſt abſurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, ſed intra. Eodem enim modo demonſtrab.tur, rectam ductam ex A, in C non poſſe cadere ſuper arcum A BC, ita vt eadem ſit, quę circunferentia A B C. Eſſet enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum A B C, arcus ſit linea curua, non autem recta. Itaq; ſi in circuli peripheria duo quęlibet puncta, &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLION.

IDEM hoc theorema demonſtrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, *coniungat duo puncta* A, *&* B, *in circunferentia circuli* AB, *cuius centrū C Dico rectā* AB, *intra circulū cadere, ita vt omnia eius pūcta media intra circulū exiſtāt. Aſſumatur.n. quodcunq; eius punctū intermediū* D, *& ex centro educātur recta C* A, *C*B, *C* D. *Quoniam igitur duo latera C* A, *C* B, *trianguli C* A B, *æqualia ſunt, erunt anguli C* A B, *C* B A, *æquales: Eſt autem an-*
5. primi. *gulus C D* A, *angulo C* B A, *maior, externus interno; Igi-*
16. primi. *tur idem angulus C D* A, *angulo C* A D, *maior erit, & ob*
19. primi. *id latus C* A, *latere C* D, *maius erit. Quare cum C* A, *ſit ducta a centro ad circunferentiam vſque, non perueniet recta C* D, *ad circunferentiam, ideoq; punctum* D, *intra circulum cadet: Idem oſtendetur de quolibet alio puncto aſſumpto. Tota igitur recta* A B, *intra circulū cadit; quod eſt propoſitū.*



COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, lineam rectam, quæ circulum tāgit, ita vt eum non ſecet, in vno tātum puncto ipſum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta poſita, intra circulum; Quare circulum ſecaret, quod eſt cōtra hypotheſin.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoq; eam ſecabit.

PER A, centrum circuli BCD, recta CE, extenſa diuidat rectam BD, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam AF, eſſe ad angulos rectos ipſi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus lateribus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & baſes AB, AD, æquales; Igitur anguli AFB, AFD, æquales erũt, *8.primi.*
hoc eſt recti. Quod erat primo propoſitũ.



SIT iam AF, ad angulos rectos ipſi BD; dico rectam BD, bifariam ſecari in F. a recta CE. Ductis .n. iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, ſint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. *5.primi.*
Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales ſunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF, & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoq; erunt latera FB, FD, æqualia. Quod ſecundo propo *26.primi.*
nebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrũ extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

FACILE quoque demonſtrari poterat ſecunda hæc pars, quæ quidem conuerſa eſt primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis eſt ad BD, erit tam quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quam *47. primi.*
quadratũ rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratũ rectæ AB, æquale ſit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectę AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atq; idcirco rectæ FB, FD, æquales erunt.

THEOR.

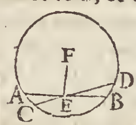
4. THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent non per centrum extenſæ; ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt.

Dvae rectæ A B, C D, ſe mutuo in E, ſecent in circulo A C B D, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & A B, & C D, ſi fieri poteſt, bifariam in E. Inuento

1. tertij. igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur

3. tertij. ſecare rectam A B, bifariam in E, ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectę lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



5. THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent; non erit illorum idem centrum.

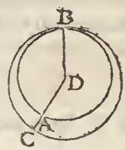


Circvli A B D, E B D, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idē centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad ſectionem B; C A, vero ſecans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli

culi E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. 6.

SI duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



Dvo circuli A B, B C, ſe interius tangant in B; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, a quo duæ rectę ducantur; DB, quidem ad tactum B; At D C, ſecans vtramq; circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, ęqualis. Quare rectæ A D, & C D, inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuo interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Evclides propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cum vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

THEOR. 6. PROPOS. 7. 7

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea,

in qua

in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodẽ puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ.

In diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G cadant in circulum quotcunque lineæ F C, F D, F E; Dico omnium, quę ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam eſſe G A, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deinde rectam G C, quæ centro propinquior eſt, maiorem recta G D, quę a centro plus diſtat, & eadem ratione G D, maiorem recta G E; Denique ex G, ad vtraſq; partes minimæ lineæ G B,



duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniã
20. primi. igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, maiora ſunt latere G C; Sunt autem rectę G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc eſt, rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.
20. primi. Deinde, quoniam in triangulo E F G, latus E F, minus eſt duobus lateribus F G, G E; Eſt autem F E, ipſi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E; Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia ſunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior eſt angulo G F D; erit ba-
24 primi. ſis G C, maior baſe G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea

propin-

propinquior centro maior eſt ea, quæ remotior.

Fiat iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H, ita vt G E, G H, æqualiter diſtent a centro. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia ſunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ G B, æquales inter ſe. *4 primi.* Quod autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cum ſit centro propinquior, maior quam G H; ſi vero cadat infra H, erit ea, cum ſit remotior a centro, minor quam G H, vt oſtenſum fuit. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ G B, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

HANC *propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.*

SI intra circulum pūctum ſumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna vero minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autē ab eo æqualiter diſtabūt.



IN *circulo A B C, punctum ſumatur D, a quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit D A, minima vero D C; ipſarum vero D E, D F, maior ſit D E, denique D E, D B, ſint æquales. Dico D A, per centrum tranſire, & D C, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt,*

D C,

D C, ipſi D A, eſſe in directum. Item D E, propinquiorem eſſe centro, quam D F. Denique D E, D B, æqualiter a centro abeſſe. Primum enim ſi D A, non tranſit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium ex
7. tertij. *D, cadentium maxima. Quod eſt abſurdum; cum D A, maxima ponatur. Tranſit ergo D A, per centrum.*

DEINDE, ſi D C, non eſt in directum ipſi D A; protracta A D, in directũ, erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipſius A D, protractæ, omnium minima; Quod eſt abſurdum; cũ DC, minima ponatur. Eſt ergo DC, reliqua pars diametri.

RVRSVS, ſi DE, non eſt vicinior cẽtro, quã DF; aut æqualiter diſtabũt ab eo, aut D E, longius ab eo abeſt: Si æqualiter
7. tertij. *diſtant, ipſæ erunt æquales; quod eſt abſurdum, ponitur enim D E, maior. Quod ſi D F, dicatur eſſe propinquior centro, ipſa*
7. tertij. *erit maior, quam D E. Quod magis eſt abſurdum.*

POSTREMO, ſi DE, DB, non æqualiter diſtant a cen-
7. tertij. *tro, erit ea, quæ magis diſtat, reliqua minor. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

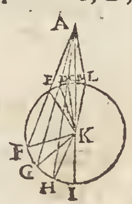
8.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoq́; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt: In conuexam vero peripheriam cadẽtium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & dia-

metrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunq; . Dico omnium eſſe maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. Econtrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe. Deinde rectam A C, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, maiorem, quam A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ A B, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora ſunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H æquales rectis A K, K I, hoc eſt, rectæ A I; erit & A I, maior, quam A H: Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quã A F. Quare A I, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima. 20. primi.



DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia ſunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior eſt angulo A K G; erit baſis A H, baſe A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior eſt linea remotiore. 24. primi.

RVRSVS, q̃a in triãgulo A C K, recta A K, minor eſt duabus A C, C K; ſi auferantur ęquales B K, C K, remanebit 20. primi.

adhuc

adhuc A B, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt.

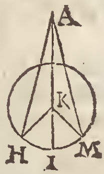
21. primi. RVRSVS, cum intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K, erunt A C, C K, minores, quam A D, D K; Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor eſt, quam remotior ab eadem.

4. primi. POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia ſunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ A C, A L, ex vtraq; parte minimę A B, inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cum ſit remotior a minima, maior quam A L; Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cum ſit minimæ propinquior, minor quam A L, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolum rectę lineæ æquales ad vtraſq; partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtraſq; partes maximæ A I.

4. primi. *FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturq; recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia ſunt lateribus A K, K M; ſunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: erunt baſes A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi poteſt. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione theorematis.*



THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

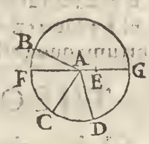
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

A puncto aſſumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter ſe æquales: Dico A, punctum eſſe centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuiſis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia ſunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & baſes A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo oſtendemus, angulos ad F, eſſe rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos; tranſibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo ſe mutuo ſecant, centrum erit circuli. Si enim eſſet aliud punctum centrum, non tranſiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.



8. *primi*

ALITER. Si punctum A, non eſt centrum circuli, ſit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G præter centrum acceptum eſt punctum A, a quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C; erit recta A D, quæ propinquior eſt centro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod eſt abſurdum. Poſitæ ſunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem abſurdum ſequetur, ſi aliud punctum præter A, centrum ponatur.



7. *tertij*

O THEOR.

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus punctis non ſecat.

SECET enim, ſi fieri poteſt, circulus ABCDEF, circulũ A G B D H E, in pluribus, quã duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis A B, B D: quibus bifariam diuiſis in I, & K, educantur ex I, & K, ad A B, & B D, perpendiculares I L, K L. Quoniam igitur rectæ I L, K L, ſecant rectas A B, B D, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; tranſibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrũ ipſius. Quare punctum L, in quo ſe diuidunt, erit centrũ dicti circuli. Eodem modo demonſtrabimus, punctum L, eſſe centrum circuli A B C D E F. Duo igitur circuli ſe mutuo ſecantes idem poſſident centrum. quod eſt abſurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non ſecat. Quod erat demonſtrandum.



5. tertij.

ALITER. Secent ſe ijdem duo circuli, ſi fieri poteſt, in tribus punctis A, & B, & D. Inuentum autem ſit I, centrũ circuli A G B D H E, a quo ad dicta tria puncta ducantur I A, I B, I D. quæ per defin. circuli æquales erunt inter ſe. Quoniã igitur intra circulũ A BCDEF, aſſumptũ eſt punctũ I, a quo cadunt in circunferentiã plures, quã duæ rectę æquales, erit I, centrũ circuli A BC-D E F. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGB-D H E; Duo ergo circuli ſe mutuo ſecantes habent idem centrum; quod eſt abſurdum.

1. tertij.



9. tertij.

5. tertij.

11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta,

cta, in contactum circulorum cadet.

Tangat circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & ſit F, centrũ circuli A B C, & G, centrũ circuli A D E. Dico rectam extenſam per G, & F, cadere in cõtactum A. Si enim non cadit, ſecet utrumq; circulũ in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ du-
cantur A F, A G. Quoniam igitur in triã-
gulo A F G duo latera G F, F A, maiora ſunt latere G A; Eſt autem G A, recta re- 20. primi
ctæ G D, æqualis; (quod G, poſitum ſit
centrũ circuli A D E) Erunt & G F, F A,



rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quam F D: Quare cum F A, æqualis ſit ipſi F B; (quod F, poſitũ fuerit centrũ circuli A B C) erit & F B, maior, quã F D, pars toto, quod eſt abſurdũ. Quod ſi quis velit cõtendere F, eſſe centrũ circuli A D E; & G, centrũ circuli A B C, inſtituetur argumẽtatio hac ratione. In triãgulo A F G, duo latera F G, G A, maiora ſunt latere F A; Eſt 20. primi
autẽ recta F A, rectæ F E, æqualis: (cum F, ponatur centrũ circuli A D E.) Igitur rectę F G, G A, maiores ſunt recta F E; dempta ergo cõmuni F G, remanebit G A, maior, quã G E: Quia igitur G A, æqualis eſt ipſi G C; (propterea quod G, ponatur eſſe centrũ circuli A B C,) erit quoque G C maior, quã G E, pars toto. quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrũ maioris circuli extra minorẽ ponatur. Nõ ergo recta F G, extenſa vtrumq; circulum ſecabit ſed in contactum A, cadet. Quare ſi duo circuli ſe ſe intus contingant, &c. Quod erat demonſtrandum.

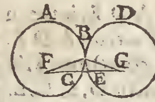
THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.

Circvli ABC, DBE tangãt ſe exterius in B, & centrũ circuli ABC, ſit F; circuli uero DBE, centrũ ſit G; Dico rectã extenſam per F, & G, trãſire per contactũ B. Si enim non

 tranſit,

tranſit, ſecet circunferentias in C, & E; ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniã igi



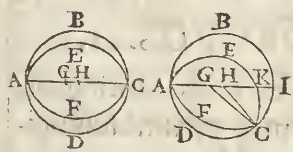
20. *primi* tur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, maiora ſunt latere F G: Eſt autẽ recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, ſit centrũ circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ſit centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quã totũ, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E;) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant, &c. Quod erat demonſtrandum.

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

Circvli A B C D, A E C F, tangant ſe intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Aſſumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta G H, in utramque partem extendatur, quam neceſſe eſt

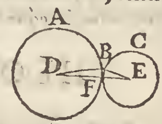
11. *tertij* cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, ſit centrum, & recta A C, diameter, diuidetur A C, bifariam in G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H quod eſt abſurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si enim G C, eſt dimidium totius A C, erit neceſſario H C, dimidio minor, cum ſit pars dimidij G C.



Quod ſi quis dicat rectã G H, extenſam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, ſed ſecare utrumque circulum in I, & K, ut in ſecunda figura perſpicuum eſt: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrũ circuli

circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, maiora ſunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipſi G K; (quod H C, H K, ſint ex centro) & recta G C, rectæ G I; (quod & hæ ſint ex centro) erit quoque recta G K, maior, quam G I, pars toto: quod eſt abſurdum. Ponatur ſecundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, maiores ſunt recta H C; Eſt autem H C, æqualis rectæ H A; (cum utraque ducta ſit ex centro H;) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A; Quare dempta communi H G erit G C, maior, quam G A, quod eſt abſurdum, cum utraque ex centro G, ducatur: Non igitur circuli intus ſe tangent in pluribus punctis, quam uno. *20. primi* *20. primi*

TANGANT ſe iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam uno, prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, quæ per contactum F, neceſſario tranſibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, ſe tangunt, tangant ſeſe in B; Ductis igitur rectis DB, E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc eſt ipſi D E. Sunt autem & maiores; quod eſt abſurdum. Non ergo ſe tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno. *12 tertij* *20. primi*



ALITER. Si circuli A B, C B, exterius ſe tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipſa intra unũ circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliũ, quod eſt contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

SI recte conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum a circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quam uno uidetur ea potiſſimum concludere, circulum nõ poſſe tangi a circulo in duobus, uel pluribus punctis, quæ longo interuallo a ſe diſſideant; nõ autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facile hoc ipſum eodem

argumento fere demonſtrari poſſit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, oſtendemus breuiter, in vno eodemque contactu non poſſe eſſe plura puncta, quam unum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, recta ducatur E F, quæ ad contactũ

11. tertij *perueniet neceſſario, vt ad punctũ A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si enim ſe tangant in alio puncto, vt in B; ductis ex B ad centra E, & F, rectis*



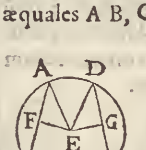
20. primi *B E, B F, erunt rectæ E F, F B, maiores recta E B; Eſt autem recta EB, æqualis rectæ E A, cum vtraq; ſit e centro E: Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quã F A quod eſt abſurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales exiſtant.*

13.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant a centro. Et quæ æqualiter diſtãt a centro, æquales ſunt inter ſe.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D; Dico ipſas æqualiter diſtare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, C D, duæ perpendiculares EF, EG, & coniugantur rectæ E A, E D; Secabuntque



3. tertij. rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariã. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ uidelicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter ſe ſunt æqualia: Quadratum autem rectæ E A æquale eſt quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarũ A F, F E, æqualia quadratis rectarũ D G, G E. Ablatis ergo quadratis

47. primi

æquali-

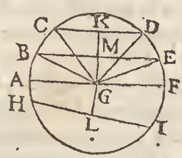
æqualibus æqualiũ rectarũ A F, D G, remanebunt quadrata rectarũ F E, G E, æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Diſtant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

RVRSVS diſtent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim iterũ ex cẽtro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidentq; rectas AB, CD, bifariã. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earũ quadrata æqualia: Eſt autem quadratũ rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A F, F E; & quadratũ rectæ E D, æquale quadratis rectarũ D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia ſunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq; ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erũt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant a centro, &c. Quod erat demonſtrandum. 3. tertij. 47. primi

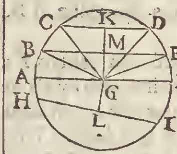
THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidẽ linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrũ G, diameter ſit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium eſſe maximam A F; & H I, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad CD, H I. Et quia remotior eſt C D, a cẽtro, quã H I, erit GK, maior quã G L, per 4. defin. huius lib. Abſcindatur ex G K, recta G M, ipſi G L, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & cõnectantur rectæ GB, GC, G D, G E. Quoniam igitur rectæ perpendiculares G M, G L, æquales ſunt, æqualiter diſtabũt rectæ B E, H I, a centro, per 4 defin. huius lib. & ideo inter ſe æquales erunt. Rurſus quia rectæ G B, G E, maiores 14. tertij 20. primi



quidem ſunt recta B E; æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E; Eadem, ratione oſtendetur A F, maior omnibus alijs lineis Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia ſunt lateribus G C, G D, triãguli C G D; & angulus B G E, maior eſt angulo C G D; erit recta B E, maior quam C D; atque adeo H I, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi B E, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandũ.

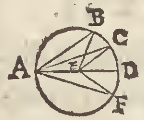


24. primi

SCHOLION.

Eodem fere modo demonſtrabitur theorema, ſi ab uno, eodemque puncto circunferentiæ plurimæ lineæ cadant.

Cadant enim a puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, tranſeat. Dico A D, eſſe omnium maximam, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E, cum in triangulo A E C, latera A E, E C, maiora ſint latere A C; ſintque rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc eſt, rectæ A D; maior erit A D, quam A C; Eademque ratione maior erit, quam A B; & ſic de cæteris. Maxima ergo omnium eſt A D.



20. primi

Deinde, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C, æqualia ſunt duobus lateribus A E, E B trianguli A E B; & angulus A E C, totus, maior eſt angulo A E B; erit baſis A C, maior baſe A B; Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior eſt.

24. primi

Caeterum & hic duæ tantum æquales lineæ duci poſſunt a puncto A, ad vtraſque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia ſint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F, æquales; Erunt baſes A C, A F, æquales, Neque vero vlla alia his duabus æqualis poteſt exhiberi; Quæcunque enim ducatur ex A, ſupra A C, ea minor erit quam A C; ſi vero infra A C, ea

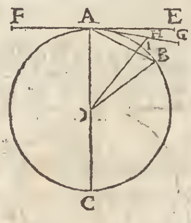
4. primi

ea maior erit, vt iam demonſtratum eſt.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

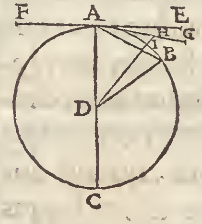
QVAE ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

In circulo A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularē neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis eſt A B; ducta D B, erunt duo anguli D A B, DBA, æquales; ſed D AB, *5. primi*
rectus eſt, per conſtructionem: igitur & D B A, rectus erit, quod eſt abſurdum; Duo enim anguli in triangulo minores ſunt duobus rectis. *17. primi* Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; nec eandē ob cauſam in ipſam circunferentiā, ſed extra, qualis eſt E F. Dico iam inter A E, rectam, & circunferentiā A B, non poſſe cadere alteram rectā. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, ſecans circunferentiam in I. Quoniam igitur



in triangulo D A H, duo anguli D H A, D A H, minores *17. primi*
ſunt duobus rectis; & D H A, rectus eſt, per conſtructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc eſt, recta illi æqualis D I, maior erit quam D H, pars *19. primi*
quam totum, quod eſt abſurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: ſed quæcunque ex A, du-

A, ducatur infra A E, ea ſecabit circulũ. Dico deniq; angulũ ſemicirculi, contentũ diametro A C, & circunferẽtia A B, maiorẽ eſſe omni acuto angulo rectilineo; reliquũ uero angulũ cõtingentiæ, qui cõtinetur recta A E, & circunferentia A B, minorẽ eſſe omni acuto angulo rectilineo. Quoniã oſtensũ eſt, omnẽ rectã ex A, ductã infra perpendicularẽ A E, cadere intra circulũ, faciet neceſſario ea cum A C, minorẽ angulũ angulo ſemicirculi, at uero cũ A E, maiorẽ angulo cõtingentiæ, cũ ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic uero totum quidpiam ad angulũ contingentiæ. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipſum circulum tangit. Oſtenſum enim fuit, ipſam cadere extra circulum; Quare ſolum in puncto illo diametri extremo ipſum attingit.

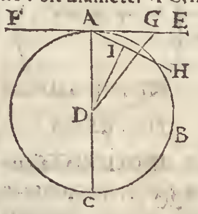
EX ORONTIO.

Poteſt hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo ABC, cuius centrũ D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quã dico extra circulũ cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniã igitur in triãgulo ADG, duo anguli DAG, DGA, minores ſunt duobus rectis, & DAG, factus eſt rectus; erit DGA, recto minor. Quare maior erit recta D G,

17. *primi*

19. *primi*

quã D A; ideoq; punctũ G, extra circulũ erit. Eademq; eſt ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quã dico neceſſario ſecare circulũ. Fiat.n.angulus ADI, æqualis angulo EAH Addito igitur cõmuni angulo DAH, erũt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq; minores



11. *pron.* duobus rectis; quare coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, ut in I. Dico igitur punctũ I, eſſe intra circulũ. Quoniã tres anguli in triã-

gulo

gulo D A I, æquales ſunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI,
oſtẽſi ſunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo 32. primi
maior, quam D A I, acutus. Quare recta DA, maior eſt quam D I. 19. primi
Non igitur D I, ad circunferentiã perueniet; proptereaq; punctum
I, intra circulum exiſtet; atque adeo recta A H, circulum ſecabit.
Reliquæ partes theorematis oſtendentur, ut prius.

SCHOLION.

EXISTIMAT Peletarius, angulũ contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo, nihil eſſe, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circũ ferentiæ, non effici angulum ullum. Vt autem ſententia illius planior fiat, afferemus in medium digreſſionem illam, quã ipſe hoc in loco adducit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput poſtremũ attentius conſiderarem, mihi ſane in mentem ſubijt prima ſpecie, Geometriã nõ ſatis ſibi conſtare; immo adeo, repugnantiã in ſe admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiã eſt, ut inter quãtitates minima dari poſſit; qualẽ hoc loco angulũ, quẽ dicunt contingentiæ, ſeu rectius, contactus, minorẽ omni acuto poſuimus. Nihilo magis conuenit, ut maxima quantitas detur, qualis hic angulus ſemicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas eſt, quod partibus conſtet, & ſecundũ eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cõtinuæ in infinitum ſectio eſt. Atque adeo cum in primam propoſitionem decimi incidiſſem, tum magis anxie expendere cæpi, quonam pacto conciliari poſſet tam aperta, ut apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rurſus ex reliquo maius, quã dimidiũ, idq; continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore poſita.

VERBI cauſa, ſint duo anguli A, quidem rectilineus, & BCD, angul⁹ (ſi modo ſit angul⁹) cõtactus: Vult prima decimi; ſi auferatũ ab angulo A, maius, q̃ dimidium, ac rurſus a reliqua

parte

parte maius, quam dimidium; ſicque continuo ex reſiduis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonſtrationem hic non appono, cum ex ſequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propoſitio eſt, quæ (ut ſic dicam) magis naturaliter uera ſit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit.



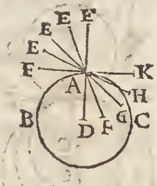
Quis enim non uidet propoſitis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abſtuleris, ut quinarium; tum a ternario reſiduo, maius quam dimidium, ut binarium; relinqui vnitatem poſito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propoſitionis ſententiam de quantitatibus eiuſdem generis eſſe intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla eſt; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc uentum erit, manifeſtum faciemus. Immo & ipſe Campanus ſecum pugnat, cum in ſecunda duodecimi demonſtranda, aliiſque propoſitionibus nonnullis ſolidorum, a curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem ſic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulũ non efficere; ſcilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decuſſatione (Decuſſationem hoc loco, & ſectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur.



Duabus enim lineis A B, *&* C D, *ſe ſcindentibus in puncto* E *ad angulos rectos, intelligatur* C D, *ſic moueri in orbe, ſcilicet ſuper puncto* E, *fixo, vt ex* C D, *fiat* F G; *hinc ſane ex recto angulo* A E C, *fiet obtuſus* A E F: *Inde ex recto* B E C, *fiet acutus* B E F *Cumque facta fuerit* H K, *hinc quidem angulus obtuſior fiet* H E A, *inde vero acutior* B E H; *ſicque continuo, donec peruenerit ad* A B, *& intra eoſdem terminos concludatur cũ ea. Tum enim immerſa, vt ſic dicam linea* C D, *in lineam* A B, *euaneſcet angulus. Neque diuerſa ratio eſt in curuo. Sit enim in circulo*

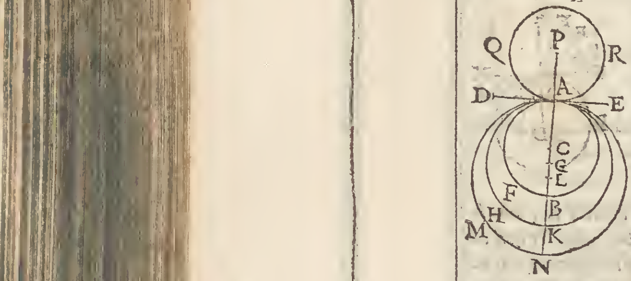
culo A B C A, cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & ſecans ipſam in A, puncto fixo, ſuper quod circunducatur ipſa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli cõtinuo varij cum peripheria, in ipſo puncto A; donec ceſſante decuſſatione, linea E D, facta ſit E K, & tangat circulum A c tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam B A C, quantũ ad angulum attinet: non aliter quam ſi B A H, eſſet linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque ſpatium C A K. Nam id ſola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; ſed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non cõſiſtat, quam vno; fit, vt punctum A, tam ſit ineptum angulo conſtituendo; quam modo erat punctum ſectionis E, linearum rectarum: Fortaſſe dices, punctum A, lineæ rectæ manere in ſuo recto, punctumque A, peripheriæ in ſuo rotundo; neque vtrumque eſſe idem punctum; ſed lineas ſe tantum inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitus omnique puncto refugit; vt contraria contrapoſita, fiant manifeſtiora: Id vero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe; ut nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.



CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

Sit enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et conſtat, ex conſectario huius decimæ ſextæ, lineam D E, contingere ipſum A F B A, circulum: ac propterea

rea D A F; eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem huiuſce decimæſextæ. Iam vero inter puncta C, & B, ſuſcipiatur in diametro A B, cẽtrum G, & ſpatio G A, deſcribatur alter maior circulus AHKA. Dico F A H, non eſſe quãtitatem. Conſtat quippe circulum A H K A, tranſire inter rectam D A, & curuam A F, cum ſit ſemidiameter G A, maior ſemidiametro C A. Manifeſtum quoque eſt, lineam D E, tangere ipſum A H K A, circulum ex eodem huiuſce decimæſextæ conſectario: ac propterea D A H, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertio, ſecundum maius ſpatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem conſectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac ſic, omnes æquales, ſi modo æqualitas inter non quanta dici poſſit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis cõtactui D A F. Fietq; ut M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat cõtactum D A M. Igitur M A F, quantitas non eſt. Quod erat demonſtrandum.



Sed & probabimus contactum interiorem circulorum quantitatem non eſſe, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli ſint ſimiles, erunt & ſemicirculi ſimiles: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis ſunt æquales, per conuerſam definitionis ſimilium ſectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non eſt. Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum.

Contactvs lineæ rectæ cum circulo, quantitas non eſt.

Manente enim eadem conſtructione, ſi D A F, ſit

quantitas

quantitas; ipſa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæſextæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: Eſſet enim F A M, pars ipſius D A F: Atqui F A M, quantitas non eſt, vt modo probauimus. Non eſt igitur F A M, pars ipſius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi poteſt. Quare D A F, quantitas non eſt: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactvs duorum circulorum exterior, quantitas non eſt.

In eadem conſtructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, deſcribatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non eſſe quantitatem. Id vero manifeſtum eſt ex poſteriori demonſtratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non ſit quãtitas, per primam harum; neque per rectam, cum neq; D A F, ſit quantitas, per ſecundam earundem; neq; D A Q quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

Ex his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum eſſe cogitauit.

Angvli, qui fiunt a diametro, & peripheria, ſiue intra, ſiue extra circulum, recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in poſteriori figura, angulus B A F, æqualis eſt angulo B A D; cum ipſi nihil accreſcat ob contactum D A F, qui quãtitas nõ eſt: & ob id Q A P, rectus eſt, & æqualis ipſi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

Haec Peletarius hoc in loco. In epiſtola autem, quã ad Cardanum ſcribit, affert aliam demonſtrationem, quam ipſe ait pleniorem eſſe. Hanc igitur hic ſubÿcere ſtatui. In primis autem præmittit hoc theorema.

In circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, ſunt æquales.

Sint

SINT enim ſuper centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G. & ſecet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, eſſe æquales. Nam ſi ſit FE D, maior ipſo CBD; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipſo FED) ac deſcribantur plures circuli ſuper eodem centro A, quorum vnus hoc loco ſatis fuerit H K L H: ſiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter ſe æquales: quod fuit oſtendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonſtrandi ratione ullus eſt paralogiſmus. Licet enim nulla ſit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex ſectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipſos rectilineos. Eiuſmodi enim auguli, qui mixti dicuntur, manifeſte maiores, & minores fiunt.

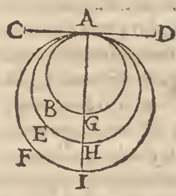


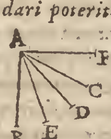
HIS ad hunc modum demonſtratis, aio contactum circulorum interiorē, non eſſe quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, poſito, deſcribatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto eſt circulus E F G E; poſita ſcilicet M B, ſemidiametro æquali ipſi A E; qui circulus tangat F CDB, circulum in puncto B. Et manifeſtum eſt, angulum F B D, æqualem eſſe angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipſe FBD, erit angulo C B D æqualis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipſum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non eſt: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonſtratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

HAEC igitur eſt Peletarij ſententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi eſt contraria. Si enim Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obſecro, tantopere deſudaſſet,

diſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunque angulo? Quid quoque magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt a nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

Primvm igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere, angulum contactus eſſe minimam quantitatem; Immo vero aſſeueramus, quemuis angulũ contactus, & ſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optime; ſed per lineam circularem. Vt propoſito angulo contactus C A B, ſi per A, deſcribatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod ſi adhuc maior circulus A F I, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi poſſit infinite. Vt angulus acutus B A C, minor eſt recto B A F; & tamen ſi ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quod ſi alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.





Pari ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſſe in

ſe infinite, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior eſt angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam A B G, deſcribantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodũ quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior eſt acutus B A D, & multò adhuc maior acutus B A C. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto, niſi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtuſum, ſed ſemper recto, uel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto niſi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis ſe ſecantibus; cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti.) ſed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Immo aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi B A G, maior eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus ſemicirculi F A I: Atque ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo ſemicirculi F A I, minor eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus ſemicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior eſt, quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonſtrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD

QVOD autem anguli contactus ſint inæquales inter ſe, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, ſimiliter & anguli ſemicirculorum, ex eo manifeſtum eſt, quod angulus quilibet conſiſtit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt conſtat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiuſdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi vnus alteri ſuperponatur; Ea enim æqualia ſunt, quæ ſibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis ſemicirculorum, nequaquam reperiatur ſemper eadem inclinatio, quod (vno ſuperpoſito alteri) lineæ eorum non ſibi reſpondeant, ſed prorſus inter ſe diſſideant, ceu ex figuris ſuperioribus perſpicuum eſt; Non erunt omnes anguli huiuſcemodi inter ſe æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam ſecari nequeat, vt recte oſtendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri poteſt cauſa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum ſecabit, donec iterum ipſum contingat: Tunc enim primum ſecare deſinet circulum: Quare ſi uel minime inclinari intelligatur ſuper puncto illo contactus fixo, ſecabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum poſſit tangere; vt ex 2. propoſitione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli ſemicirculorum æquales inter ſe erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ ſibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui a peripherijs maioribus, minores. Anguli denique ſemicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obſcure intelligi poteſt ex ſuperioribus figuris: Neque enim lineæ talium angulorum ſibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri poſſe æqualem exhiberi, ac rurſus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod

etiam de quocunque angulo ſemicirculi dici poteſt. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam eſſe quantitatem, angulum vero ſemicirculi, maximam.

DEINDE non eſt, quod anxium reddat Peletarium prima propoſitio decimi libri. Ea enim intelligenda eſt tam de quantitatibus eiuſdem generis, quam diuerſi, dummodo vtaius multiplicata alteram excedere poſſit; cuiuſmodi non ſunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus ſiue bis ſumatur, ſiue ter, quater ue, ſiue deniq; quoties libuerit, ſemper minor eſt angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter ſe æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel ſe illis æquarent; eſſet quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui eſt centeſima pars propoſiti anguli acuti rectilinei; quod eſt abſurdum, cum quilibet angulus contactus minor ſit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonſtratum. Quare nullo modo ex illa propoſitione colligere licebit, ſi ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rurſus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus propoſito; quoniam angulus contactus, vt dictum eſt, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, ſiue quantumuis auctus, ſemper minor exiſtit angulo acuto; nec vnquam ipſum ſuperare poteſt: quod tamen neceſſario requiritur ad demonſtrationem dictæ propoſitionis. Vt enim demonſtretur, multiplicanda eſt minor quantitas propoſita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipſe Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propoſ. lib. 10. aſſumit ſemper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere poteſt.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis ſe ſecantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt conſtat ex anguli plani deſcriptione tradita ab Euclide, quanquam ſe mutuo non ſecent, ſi producantur; cuiuſmodi ſunt peripheria, & li

& linea recta illam tangens; vel etiam duæ peripheriæ ſe tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

P O R R O *demonſtratio Peletarij, qua conatur oſtendere, contactum interiorem non eſſe quantitatem, nullius eſt momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores ſint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter ſe omnes æquales eſſe neceſſe eſt, ſed poteſt alio alius maior eſſe, & minor; vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores ſunt angulo recto, & tamen ipſi inter ſe non ſunt omnes æquales. Sic etiã omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores ſunt homine, vel monte, cum tamen ipſæ inter ſe valde ſint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eſſe.*

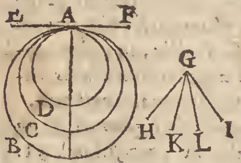
N E G A M V S *deinde, angulos ſegmentorum ſimilium æquales eſſe, ſicut ipſe aſſumit in ſequenti demonſtratione: Neque enim hoc Euclides ſignificauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea ſegmenta eſſe ſimilia, in quibus anguli rectilinei ſunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales exiſtunt. Immo magnum diſcrimen eſt inter angulos in ſegmentis, & angulos ſegmentorum, vt aperte conſtabit ex propoſitione. 31. huius libri.*

E X *his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonſtrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior ſit vera pars eius, cum contrarium nullo modo oſtenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem conſtituunt duo circuli ſe exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo aſſeruit, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Poſtremo hallucinatus eſt quoque Peletarius in illa demonſtratione, quam ad Cardanum miſit. Etſi enim angulus ſemicirculi in maiori circulo maior eſt angulo ſemicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus ſemicirculi, maior ſit angulo re-*

eto. Semper enim rectus angulus ſuperabit quemuis angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto propoſito, dari poſſunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas poteſt continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius.



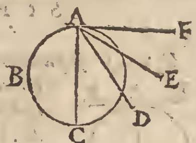
Proponantur enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur deſcribantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant G K, G L, diminuetur continue angulus acutus: Et tamē ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CAETERVM ex hac propoſitione 16. perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet. *1. poſter.*

TRANSITVR a minori ad maius, vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta

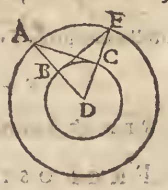


ſta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quamdiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum vero ſecare ceſſat, effici angulum rectũ maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor;) conſtat quoq; vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.

PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda ſit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, ſecans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, ęqualia ſint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; anguluſq; D, contentus dictis lateribus, ſit communis: Erunt & baſes B E, C A, & anguli D B E, D C A, ſuper ipſas, æquales: Eſt autem D B E, rectus ex conſtructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangens circulum B C, in C. quod faciẽdũ erat. *4. primi.*



SCHOLION. I.



QVOD ſi punctum A, datum fuerit in circunferentia circuli A B, cuius centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta ſemidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propoſitionis, circulum tanget: quod eſt propoſitum.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM A B C, cuius centrum D, ſecet recta B C, cui ducenda eſt parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circũferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G, parallela ipſi B C, (28.primi.) tangetq; circulum in A, per corollarium propoſ. 16. quod erat faciendum.

SCHOLION. II.

SED & ſequens problema cum Cardano abſoluemus.

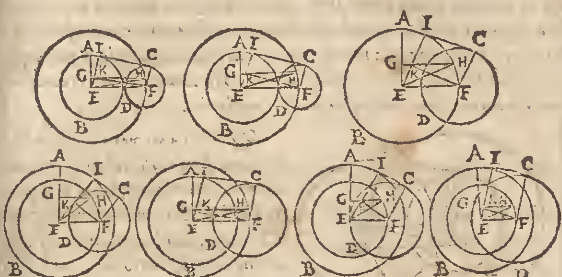
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



SINT primũ duo ꝓpoſiti circuli æquales A B, C D, quorũ centra E, & F, recta iungantur EF, ad quã ducãtur perpendiculares E A, F C, ſecãtes circun-

circunferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrunq; circulum tangere. Cum enim E A, F C, ſemidiametri circulorum æqualium ſint æquales, & parallelæ, quod anguli E, & F, recti ſint; Erunt quoq; E F, A C, æquales & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta A C, vtrunq; circulũ tanget, cum rectos angulos conſtituat in extremitatibus ſemidiametrorum. 28.primi. 33. primi. 29.primi.

SINT ſecundo duo circuli propoſiti inæquales AB, CD, quorũ rurſus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter



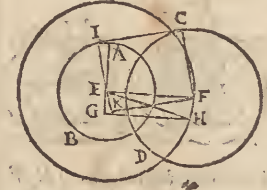
uallũ ex E, centro maioris circuli circulus deſcribatur F H, ſi maior non tranſeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abſcindatur ex ea recta A G, ſemidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipſi E A, perpendicularis ducatur G H, vſq; ad circunferentiã circuli vltimo deſcripti. Ducta aũt recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atq; ex F, agatur ipſi E I, parallela recta F C. Dico rectã p pũcta I, & C, ductã vtrũq; circulũ cõtingere. Abſcindatur. n. ex I E, recta IK, ipſi A G, vel ſemidiametro F C, minoris circuli æqualis, vt ſint reliquæ EG, EK, æquales quoq;, ducaturq; recta KF. Quoniã igĩt latera HE, EG trianguli HEG, æqualia ſunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipſis cõtenti æquales, ex cõſtructione: Erunt anguli HGE, FKE, æquales; Ac proinde, cũ HGE, rectus ſit, ex cõſtructione, erit & FKE, rectus. Rurſus quia CF, IK, æquales ſunt, & parallelæ, ex cõſtructione, erũt quoq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, cũ æqualis ſit externo FKE, rect⁹ erit; 4.primi. 33. primi. 29.primi.

Ideoq;

Ideoq; & ICF, rectus exiſtet. Quocirca per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiat in extremitatibus ſemidiametrorũ. Quod erat ꝓpoſitũ.

SATIS aũt conſtat, ſi circuli propoſiti æquales fuerint, id quinq; modis poſſe fieri. Aut.n.alius extra aliũ cadit, aut ſe mutuo cõtingũt, aut ſe inuicẽ ꝑ cẽtra ſecant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra conſiſtant in cõmuni eorũ ſegmento, vel certe extra illud.

ITEM ſi circuli ꝓpoſiti fuerint inæquales, id cõtingere poſſe ſeptẽ modis. Aut.n.minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipſum tãgit, aut ipſũ ſecat, ita vt vel cẽtrũ eius ſit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãſeat, vel cẽtrũ minoris ſit extra circunferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris ꝑ maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.



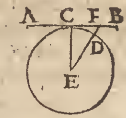
QVONIAM vero, circulis inæqualibus exiſtẽtibus, initiũ cõſtructionis ſumpſimus ſemꝑ a maiori, ſi quis maluerit a minori ĩcipere, id efficiet eadẽ cõſtructione, demõſtrationeq́;, niſi q̃d rectæ AE, IE, protrahẽdæ ſunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales ſint ſemidiametro FC, maioris circuli; Addito inſuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE EG; FE, EK, idcirco æquales eſſe, q̃d HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales ſint ex cõſtructione. Deniq; angulũ EIC, eſſe rectum, ex 29. propoſ. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus ſit oſtenſus.

17.
THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularẽ eſſe ad AB.

A B. Si. n. nō eſt, ducatur EF, perpēdicularis ad AB, ſecās cir
cunferentiā in D. Quoniā igitur in triangulo
CEF, duo anguli ECF, EFC, minores ſunt 17. *primi.*
duobus rectis; Et eſt EFC, rectus, ex cōſtru-
ctione: erit ECF, minor. Quare maior erit
recta EC, hoc eſt, ED, quā EF, pars quā totū. 19. *primi.*



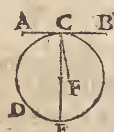
qđ eſt abſurdū. Eſt igitur EC, perpēdicularis ad AB. Quare
ſi circulū tāgat recta quæpiā linea, &c. Qđ demōſtrādū erat.

ALITER. Si EC, nō eſt perpendicularis ad AB, erit alter
angulorū Ad C, obtuſus, & alter acutus: Sit ergo ECB, acu
tus, q cū maior ſit angulo ſemicirculi ECD, erit angulus ſe-
micirculi minor angulo aliquo acuto: qđ eſt abſurdū. Oīs
ſiquidem angulus ſemicirculi maior eſt omni acuto. 16. *tertij.*

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cōtactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE,
in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis
ad AB. Dico in CE, eſſe centrum circuli. Si
enim eſt extra CE, ſit F, centrum, a quo ad
C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis 18. *tertij.*
erit ad AB. Quare rectus angulus FCB,



recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſur-
dū. Nō igitur extra CE, cētrū circuli exiſtet. Itaq; ſi circulū
tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demōſtrandū.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

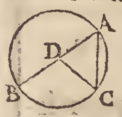
IN

In circulo ABC, cuius centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplũ eſſe anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniã



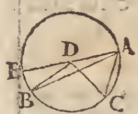
igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, erunt
5.primi. anguli DAB, DBA, ęquales: Eſt autem ex-
32.primi. ternus angul⁹ BDE, æqualis duob⁹ angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorũ, vt anguli DAB Eodẽ mõ duplus oſtẽdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ eſt ꝓpoſitũ.

Secvndo non includãt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quo-



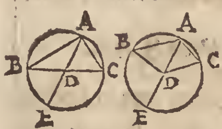
niam igitur externus angulus BDC, æqualis
32.primi. eſt duob⁹ internis DAC, DCA: Hi aũt duo
5.primi. inter ſe ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

Tertio recta AB, ſecet rectam DC, & per centrũ D, extendatur recta AE. Quoniam igitur an-



gulus EDC, ad centrũ, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandẽ baſin EC, & rectã AE, extẽditur per centrũ; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtẽſum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent.n. hi anguli eandẽ baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si.n. totum totius eſt duplũ, & ablatũ ablati; erit & reliquũ reliqui duplũ. In circu
19. pron. lo igit angul⁹ ad cẽtrũ duplex eſt, &c. Qđ erat demõſtrãdũ.

SCHOLION.



Quod ſi rectæ BD, CD, in cẽtro angulũ nõ cõſtituãt ad partes baſis BC; qđ tũ demũ fit, quãdo ſegmentũ BAC, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentũ minus; nihilo minus ſpatiũ illud ad centrũ duplũ erit anguli ad circunferẽtiã, qui eãdẽ habeat baſin, quã ſpatiũ illud. Ducta.n. recta AE, per cen

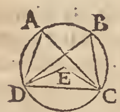
trũ

trũ, erit tã angulus BDE, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad circunferentiã, quã angulus CDE, ad centrũ anguli CAE, ad circunferẽtiã, vt oſtẽſum eſt. Spatiũ igi͡t ad centrũ D, baſin habẽs BEC, cõſtanſq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ eſt totius anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

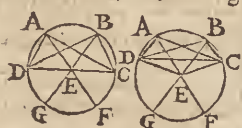
THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, exiſtãt anguli A, & B, in ſegmento DABC; Dico eos eſſe æquales. Sit enim primo ſegmentum DABC, ſemicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus eſt tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ baſin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. Quare inter ſe æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendent͛ eſſe æquales. *20. tertij.* *7. pron.*



Sit ſecũdo ſegmentũ DABC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducãtur ꝑ centrũ E, rectæ AF, BG, & in ſegmẽto minori connectãtur rectæ DE, CE. Qm̃ igi͛ angul⁹ DEF, ad cẽtrũ, dupl⁹ eſt anguli DAF, ad peripheriã: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & ſunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, ſimul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC. *20. tertij.*

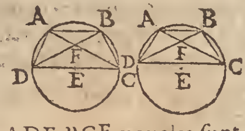


Aliter. Quoniam, vt in ſcholio propoſ. præcedẽtis demonſtrauimus, ſpatiũ ad centrũ E, cuius baſis DGFC, duplum eſt vtriuſq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: Erunt ipſi anguli DAC, DBC, inter ſe æquales. *7. pron.*

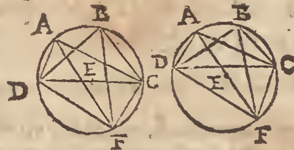
Aliter. Secẽt ſeſe rectę AC, BD, in F, & connecta͛ recta AB; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales ſunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi,

quam

15.*primi.*



quã hi æquales ſunt duobus rectis : Si auferantur anguli AFD, BFC,qui æquales ſunt;erũt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF BCF,æquales ſunt oſtẽſi in ſegmẽto maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, ęquales ſunt.



ALITER. Ductis rectis DF,CF, ad pũctũ circũferẽtiæ quoduis F, includẽtibus cẽtrũ E, ita vt tã DABCF, q̃ FDABC, ſit ſegmẽtũ maius, iungãtur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF,DBF,in eodem ſegmento maiori DABCF,ęquales ſunt;nec nõ & anguli FAC,FBC,in ſegmẽto etiã maiori FDABC,exiſtẽtes : Si hi illis addãtur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC,æqualis.Itaq; in circulo,qui in eodẽ ſegmento ſunt,&c. Quod erat oſtẽdendũ.

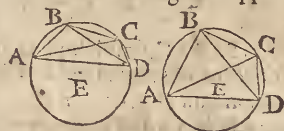
21.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo,cuius cẽtrũ E,inſcriptũ ſit quadrilaterũ ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC,CDA : Itẽ BCD, DAB,æquales eſſe duobus rectis. Ductis.n. diametris AC,BD,erunt duo anguli ABD,ACD, ĩ eodẽ ſegmẽto ABCD,ęquales. Similiter erũt duo anguli CBD,

21.*tertii.*



CAD,in eodẽ ſegmẽto CBAD,æquales Quare duo anguli ABD,CBD,hoc eſt,totus angulus ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD. Addito igit' cõi angulo CDA, erũt duo anguli ABC,CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD,CDA : Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis; igitur

32.*primi.*

& duo

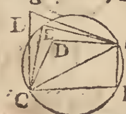
& duo ABC, CDA, duobus erũt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis ęquales. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM quoq; huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

Si in quadrilatero anguli, q̃ ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circul⁹, qui p tres quoſcũq; eius angulos deſcribitur, trãſibit etiam per reliquũ quartũ angulũ; Atq; adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autẽ hoc fieri poſſit, in 25. propoſ. huius lib. & in 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiã per D. Si .n. nõ, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circunferẽtiã, ita vt nõ ſecent rectas CD, AD. Quo facto, erũt anguli B, & E, æquales duobus rectis; Erãt aũt & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato cõi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod eſt abſurdũ. Ducta .n. recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus p pũctũ D. qđ eſt propoſitũ.

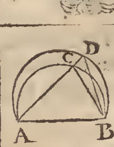


22. tertij.

21. primi.

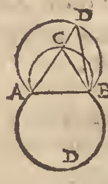
THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, nõ conſtituentur ad eaſdem partes.



SI .n. fieri pōt, ſuꝑ recta AB, cōſtituātur ad eaſdem partes duo ſegmēta ſimilia, & inęqualia ACB, ADB. Perſpicuū ē aūt, qđ ſe ſolū interſe- 10. *tertij.* cēt in pūctis A, & B; circulus .n. circulū nō ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmēti tota erit extra peripheriā alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecās circunferētias in C, & D, & cōnectātur rectę CB, DB. Quoniā igˀ ſegmēta ponūtur ſimilia, erit ꝑ 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo 16. *primi.* ADB, externus interno: qđ eſt abſurdū. Nō igitur ſegmēta ſimilia. Quare ſuꝑ eadē recta linea, &c. qđ erat demōſtrādū.

SCHOLION.



EADEM ratione, neq; ad diuerſas partes ſuper eadē recta linea duo ſegmēta circulorū ſimilia, & inæqualia cōſtituētur. Nā ſi alterū eorū intelligatˀ moueri circa lineā AB vt iā ambo ſint ad eaſdē partes, in idē abſurdū incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, cōſtituta ſint ſegmēta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmētū AEB, ſegmento CFD, cōgruere. Si.n. nō cōgruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, cōſtituētur ſuper eadē recta CD, duo ſegmēta AEB, AFB, ſimilia, & inęqualia; qđ eſt 23. *tertij.* abſurdū. Demōſtratū .n. eſt cōtrariū. Qđ ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabūt ſeſe in pluribꝰ pūctis, q̃ duobꝰ, nimirū in A, P, G. Qđ eſt abſurdū. Circuli .n. nō ſe ſecāt in plu- 10. *tertij.* ribꝰ pūctis, q̃ duobus. Cōgruet igitˀ ſegmētū AEB, ſegmento



CFD,

CFD, atq; adeo ipſa inter ſe æqualia erũt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

NON ſolum in hac propoſitione oſtẽditur ſegmenta ſimilia AEB, CFD, eſſe æqualia, ſuper æquales baſes AB, CD; verũ etiam ipſas peripherias, eo quod, vt demonſtratum eſt, ſibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propoſ. & præcedentis, facile demonſtrabitur. Nimirum, ſegmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, eſſe ſimilia. Nam propter æqualitatem alterum alteri congruet; quare ſimilia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipſis conſtituti æquales ſint.

PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

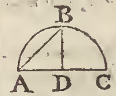
SIT ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, uel maior eſt angulo DAB, uel æqualis, uel minor. Sit primo maior, (quod quidẽ continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia BD, tranſit per centrum ex corollario propos. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum; cum ponatur eſſe minus, erit DA, maior, quam DB,



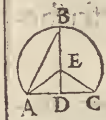
cum DB, perficiens diametrum, ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt; Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentũ ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, triãguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare baſes EA, EC, æquales erunt; 7. *tertij.* 18. *primi* 4. *primi*

Quæ Eſt

6. primi Eſt autẽ & E A, æqualis ipſi E B, quod anguli E A B, E B A,
æquales ſint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æquales erũt, ac
9. tertij. propterea E centrũ erit circuli A B C. quandoquidẽ ex E, plu-
res quã duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.
Sit ſecundo angulus D B A, angulo D A B, æqualis;
(Quod demũ continget, quando ſegmentũ A B C, ſemicircu-



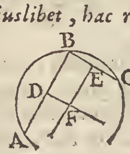
lus fuerit. Tunc.n erit A C, diameter, & D, cẽ-
trum, atq; adeo rectæ D A, D B, æquales; quare
5. primi & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) Erunt
6. primi igitur rectæ D A, D B, æquales: Erat autem &
D C, æqualis ipſi D A; Quapropter cum tres rectæ D A,
9. tertij. D B, D C, cadant ex D, in circunferentiam, erit D, centrum.
Sit tertio angulus D B A, angulo D A B, minor, (quod
quidẽ eueniet, ſi ſegmentũ A B C, ſemicirculo maius extiterit.
Tunc enim, quoniam B D, tranſit per centrũ, ex corollario
propos. 1. huius lib. quod quidẽ intra ſegmentũ, cũ maius
7. tertij. eſſe ponatur, exiſtit; erit D B, omnium, quæ ex D, in circun-



ferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quàm
18. primi D A, ideoq; angulus D A B, maior angulo D B A.
fiatq; angulus B A E, æqualis angulo D B A, & ſe-
cet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod oſten-
detur eſſe centrum eodem modo, quo idipſum
oſtendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo
D A B, ut conſtat, ſi recta ducatur E C. Circuli igitur ſeg-
mento dato, deſcripſimus circulum, cuius eſt ſegmentum.
Quod facere oportebat.

SCHOLION.

BREVIUS inuenietur centrum ſegmenti propoſiti cuiuslibet, hac ratione. Aſſumantur in peripheria ſegmenti

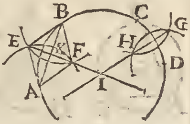


tria puncta vtcunque A, B, & C quæ duabus rectis coniungantur A B, B C; quæ bifariam ſecentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educãtur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniã igitur per corollariũ propoſ. 1. huius lib. tam D F, quã E F, incedit per centrum circuli, cuius A B C, eſt ſegmentũ, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum eſt inuentum; quod eſt propoſitum.

ALITER, vt Mechanici ſolent. Accipiantur in circun-

ferentia

ſerentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus deſcribantur duo arcus ad idẽ interuallum quodcunque, qui ſe interſecent in E, & F, Poſtea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus ſe ſecantes in G, & H, deſcribãtur ad quoduis interuallum, ſiue idẽ quod prius, ſiue diuerſum. Si igitur agantur rectæ E F, G H, tranſibunt ambæ per centrũ: quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autẽ lineæ E F, G H, per cẽtrum tranſeant, ita demonſtrabitur. Ducantur rectæ A E, A F, B E, B F quæ inter ſe æquales erunt, ob æqualitatem circulorũ. Quoniã igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia ſunt lateribus B E, E F, trianguli B E F; & baſes quoque A F, B F, æquales: Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rurſus ducta recta A B, quæ ſecet E F, in K; quoniã latera A E, E K, triãguli A E K, æqualia ſunt lateribus B E, E K, triãguli B E K; & anguli A E K, B E K, oſtenſi quoque æquales; erunt & baſes A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoque recti. Quare cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; tranſibit per centrũ ex corollario propoſ. 1. huius lib. Eadem ratione oſtendetur G H, tranſire per centrum.



8. primi

4. primi

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

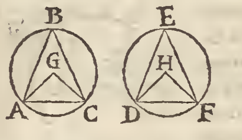
IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

In circulis æqualibus A B C, D E F, quorũ cẽtra G, H, cõſtituti ſint primo ad cẽtra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, q̃b⁹ inſiſtũt, ſiue ſup̃ quas aſcẽderũt, eſſe ęquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo pũcta B, E, ad q̃ rectę ducant̃ A B, C B, D E, F E, cõnectãturq; rectę A C, D F. Quoniam igitur anguli B, & E, dimidij ſunt ęqualiũ angulorum G, & H; erunt ipſi æquales inter ſe: Quare ex definitione ſegmẽta A B C, D E F, ſimilia erunt. 20. tertij.



Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia ſunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorũ æqualitatem, & anguli, quos continẽt G, H, æquales, ex hypotheſi; erũt baſes A C, D F, æquales: Cum igitur ſegmenta ſimilia A B C, D E F, ſint ſuper lineas æquales A C, D F, erunt ipſa inter ſe æqualia; Quare ſi a circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F: Quod eſt propoſitum.

4. *primi*



24. *tertij.*

S I N T ſecundo ad periperipherias conſtituti duo anguli æquales B, & E; dico rurſus, peripherias A C, D F, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, ut prius, ſegmenta A B C, D E F, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas A C, D F: (cum enim anguli G, H, æquales ſint, quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt prius, rectæ A C, D F, æquales) erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

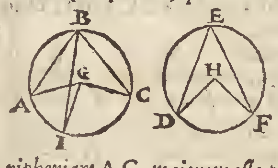
20. *tertij.*
24. *tertii.*

SCHOLION.

20. *tertij.*

H AE C ſecunda pars breuius ita demonſtrabitur. Quoniã anguli G, H, dupli ſunt angulorum æqualium B, E, erunt ipſi inter ſe æquales. Quare vt oſtenſum eſt prius, peripheriæ A C, D F, ſuper quas aſcenderunt, æquales erunt.

Q V O D ſi dicti anguli fuerint inæquales, maior inſiſtet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, ſit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Item angulus A B C, *ad circumferentiam maior angulo* D E F, *ad circunferentiam. Dico peripheriam* A C, *maiorem eſſe peripheria* D F. *Si enim fiat angulus* C G I, *angulo* D H E, *&* *angulus* CBI, *angulo* DEF, *æqualis; erunt, ut oſtenſum eſt, peripheriæ* C I, D F, *æquales;*

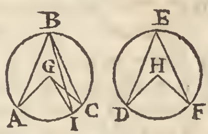


les; Ac propterea A C, *maior, quam* D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs inſiſtũt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, inſiſtant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs A C, D F; Dico angulos A G C, & D H F, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. *26. tertij.* Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter ſe æquales, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales.



INSISTANT ſecundo eiſdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, vt A B C, maior eſt; fiat angulo E, æqualis angulus A B I; eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. *26. tertij.* Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum.

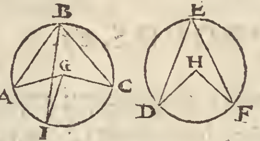
SCHOLION.

HAEC ſecunda pars ita quoque demonſtrabitur. Quoniã anguli A B C, *&* E, *dimidii ſunt angulorum* A G C, *&* H, *20. tertij.* *quos iã oſtendimus eſſe æquales; erunt & ipſi inter ſe æquales.*

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, inſiſtet maiori maior angulus, ſiue ad centrum, ſiue ad circunferentiam, quam minori. In figura enim ſcholii præcedentis ſit peripheria A C, *maior, quam peripheria* D F. *Dico angulum* A G C, *maio-*

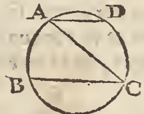
 -rem

rem eſſe angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo



D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ DF, ducanturq; rectæ IG, IB, erunt, ut oſtẽſum eſt, tã anguli ad cẽtrũ CGI, DHF, quã anguli ad circunferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo DHF, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.

E x hac porro propoſitione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuo nõ



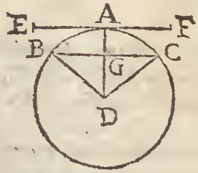
ſecantes, eſſe parallelas. Et ſi ſint parallelæ, ab ipſis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B. D C. Dico A D, B C, eſſe parallelas. Ducta namque recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, erunt anguli
27. tertij A C B, C A D, ipſis inſiſtentes, æquales; qui cum ſint alter-
27. primi ni, erunt A D, BC, parallelæ.

S I N T iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, eſſe æquales. Cum enim ſint parallelæ A D, BC, ducta
29. primi recta A C; erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales; Ac pro-
26. tertij. inde arcus A B. DC, quibus inſiſtunt, æquales erunt.

V I S V M eſt quoque hoc loco apponere ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile: uidelicet.

L I N E A recta quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectę lineæ; quæ peripheriam illam ſubtendit.

I N circulo A B C, cuius centrũ D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF tangens circulum. Dico EF, parallelam eſſe rectæ BC, arcũ BAC,



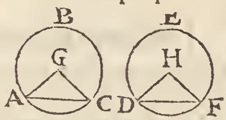
ſubtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctũ contactus A, recta D A, connexiſq; rectis DB, D C, erunt anguli
27. tertij. ADB, A DC, circunferẽtijs æqualibus AB, AC, inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli BDG lateribus C D, D G, trianguli
4. primi CDG, æqualia, utrumq; utriq;. Igitur & anguli ad G, æquales

les ſunt . ſuper baſes G B, G C *; ac propterea recti . Igitur &*
AGB AGC,*illis deinceps recti ſunt . Sunt autem & anguli*
GAE , GAF,*recti, quod* D A,*perpẽdicularis ſit ad* EF*; Ergo* 18. *tertij.*
E F, BC, *parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum.* 28. *primi*

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

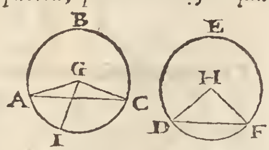
IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorẽ quidem maiori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales A C, D F . Dico maiorẽ peripheriam ABC, æqualẽ eſſe maiori DEF ; & minorẽ AC, minori D F. Ductis.n. rectis AG, GC, DH, H F, erunt latera AG, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, HF, trianguli DHF; Sunt autẽ & baſes A C, DF, æquales : Igitur anguli G , & H , æquales erunt : Ac propterea peri- 8. *primi*
pheriæ A C, D F, quibus inſiſtunt, æquales erunt; quæ abla- 26. *tertij.*
tæ ex totis æqualibus , relinquent æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis , æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

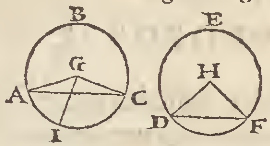


SCHOLION.

QVOD *ſi fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorẽ peripheriã, quam minor. ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo . Nã ſi de ſegmẽtis circuli maiorib⁹ ſermo habeãt, maior linea auferet minorem peripheriã, q̃ minor. In circulis.n. æqualib⁹* ABC, D E F, *quorum centra G, & H, ſit recta* A C, *maior, quam D F . Dico peripheriam A C , ſemicirculo minorem , maiorem eſſe peripheria D F ; At peripheriam A B C ; mi-*



norem peripheria D E F. *Ductis enim rectis* A G, GC, DH, H F, *erunt latera* AG, G C, *trianguli* AGC, *æqualia lateribus* D H, H F, *trianguli* D H F; *Ponitur autem baſis* AC,
25. primi *maior baſe* D F: *Igitur angulus* A G C, *maior erit angulo* D H F. *Fiat angulus CGI, angulo* D H F, *æqualis; eritque propterea peripheria CI,*
26. tertij. *peripheriæ* D F, *æqualis; Ac proinde peripheria* AIC, *maior, quam peripheria* DF.

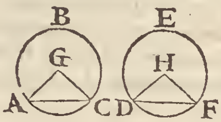


Ideoque reliqua A B C, *minor, quam reliqua* D E F.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

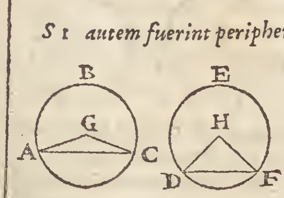
IN circulis eiſdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli DHF; Sunt autẽ & anguli G, H, æqua-



27. tertij. les, quod æqualibus peripherijs A C, D F, inſiſtant: Igitur
4. primi baſes A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, ſubtendet maiorẽ maior linea, quam minorem, ſi de ſegmẽtis ſemicirculo minoribus fiat ſermo. Nam ſi de ſegmẽtis maioribus ſemicirculo loquamur, ſubtendet maiorem minor linea, quam minorem.



rem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, *quorum centra G, & H. ſint peripheriæ ſemicirculo minores* A C, D F, *ſitque* A C, *maior, quam* D F; *Ac proinde* A B C, *minor quam* D E F. *Dico lineam* A C, *maiorem eſſe, quam* D F. *Ductis enim rectis* A G, G C, D H, H F, *erit angulus* A G C, *maior angulo* D H F, *ex ſcholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera* A G, G C *trianguli* A G C. *æqualia ſint lateribus* D H, H F, *trianguli D H F, erit baſis* A C, *maior baſe* D F, *&c.* 24. primi

S V N T *autem proxime antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. ut conſtat ex demonſtrationibus adductis. Eædem enim locum habent in uno eodemque circulo.*

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

D A T A M peripheriam biſariam ſecare.

S I T peripheria A B C, ſecanda biſariam. Ducatur recta ſubtendens A C, qua diuiſa biſariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, biſariam ſecabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B; Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti: Igitur & baſes A B, C B, æquales erunt; Ac propterea peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam biſariam ſecuimus: Quod erat faciendum. 4. primi 28. tertij.

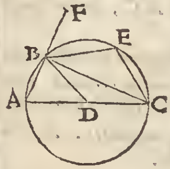


THEOR. 27. PROPOS. 31. 30.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui uero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris

ioris ſegmenti, recto quidẽ maior eſt: minoris autẽ ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrũ D, diameter ſit A C, cõſtituaturque in ſemicirculo angulus ABC, exiſtetq; angulus BAC, in maiori ſegmẽto CAB, conſtituatur quoq; in CEB, minori ſegmẽto angulus B E C. Dico angulum A B C, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum uero BAC, in maiore ſegmento, minorem recto; & angulũ B E C, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulũ maioris ſegmenti cõprehenſum recta BC, & peripheria BAC, eſſe recto maiorem: At angulum minoris ſegmenti comprehẽſum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducantur enim rectæ B C, B D, & extendatur A B, in F. Quoniã igitur rectæ D A, D B, æquales ſunt, erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit: Eſt autem & angulus F B C, externus eiſdem duobus internis angulis B A C, BCA, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli A B C, F B C; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur eſt angulus A B C; quod eſt primum.



5. primi — *32. primi*

QVONIAM uero in triãgulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, ſunt duobus rectis minores: Et eſt angulus ABC, oſtenſus rectus: Erit angulus BAC, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

17 primi

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulũ deſcripto, duo anguli oppoſiti BAC, & BEC, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, oſtenſus eſt recto minor: Erit B E C, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

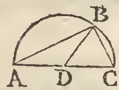
22. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars ſit anguli ſegmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria BAC; erit angulus ſegmenti maioris, recto maior; quod eſt quartum.

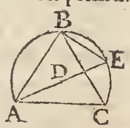
POSTREMO, cũ angulus ſegmenti minoris, comprehenſus

henſus recta B C, & peripheria B E C, pars ſit quoq; anguli recti FBC; Erit angulus ſegmẽti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt &c. Quod erat demonſtrandum.

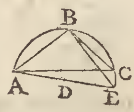
Alia demonſtratio huius propoſitionis. In ſemicirculo, cuius diameter A C, & centrũ D, ſit angulus ABC, quem dico eſſe rectũ. Ducta.n.recta B D, erunt an-



guli DBA, D A B, æquales, quod rectæ DA, 5. primi
DB, æquales ſint. Cũ igitur angulus BDC,
externus æqualis ſit duobus angulis internis 32. primi
DBA, DAB, in triãgulo ABD: Erit angulus BDC, duplus anguli DBA; Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC; atq; adeo duo anguli ad D, dupli erũt totius an-
guli ABC. Cũ igitur anguli ad D, ſint duobus rectis æquales; 13. primi
erit angulus A B C, eorũ dimidius, rectus: quod eſt primũ.

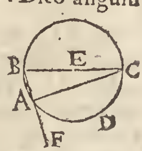


Sit rurſus in ſegmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum.



Sit iterum in ſegmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto maiorem. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus; qui cum ſit pars anguli ABC, erit angulus A B C, recto maior: quod eſt tertium.

Iam vero proponatur ſegmentum maius A B C, & ſegmentum minus A D C, quorum centrum B. Dico angulũ C A B, ſegmenti maioris, eſſe recto maiorem; At angulum C A D, ſegmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro C B & recta B A F; erit angulus B A C, in ſemicirculo rectus, atque adeo ei deinceps F A C. Cum igitur angulus rectus B A C, ſit pars anguli C A B, ſegmenti maioris: & angulus G A D, ſegmenti minoris, pars



quoque

quoque anguli recti F A C ; conſtat utrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eiſdem ſit æqualis. Quod quidem conſtat ex priori demonſtratione.

EX CAMPANO.

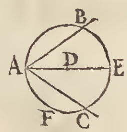
Ex hac propoſitione perſpicuum quoque eſt, non ualere duas illas argumentationes, quas impugnauimus in propoſ. 16. huius lib. quarum una eſt.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA uero eſt eiuſmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. Erit igitur angulus A B E, ſegmenti maioris, recto maior. Quare ſi A B, moueatur uerſus A E, circa A, punctum fixum, faciet ſemper cũ peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, ubi faciet angulum ſemicirculi, recto minorem. Quod ſi ulterius moueatur ad A C, faciet a fortiori angulum A C F, ſegmenti minoris, recto minorem. Tranſitur ergo ab angulo ſegmenti maioris, qui recto maior eſt, ad angulum ſemicirculi, uel etiam ſegmenti minoris, quorum uterque recto minor eſt; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat tranſitus, perſpicuum eſt, uitioſas eſſe prædictas conſequentias.

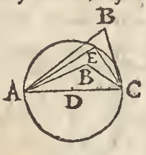


SCHOLION.

MANIFESTVM quoque eſt conuerſum huius theorematis. Hoc eſt, ſegmentum circuli, in quo angulus conſtitutus eſt rectus, ſemicirculus eſt. Nam ſi eſſet maius, angulus in eo foret acutus; ſi minus, obtuſus; & ſic de reliquis partibus theorematis.

HINC etiã perſpicuum eſt, ſi angulo recto recta ſubtenſa bifariam ſecetur, & ex puncto diuiſionis circulus deſcribatur ad

ad interuallum dimidiæ ſubtenſæ; circulum tranſire per angulum rectum. Angulo enim recto A B C, *ſubtenſa* A C, *biſariam ſecetur in* D, *puncto, ex quo ad interuallum* D A, *uel* D C, *circulus deſcribatur* A E C, *quem dico tranſire per* B, *ſi enim tranſeat citra* B, *uel ultra, ductis rectis* A E, C E, *erit angulus* A E C, *rectus quoque. Quare anguli recti* B, & E, *æquales erunt; quod eſt abſurdum, cum angulus* E, *ſit neceſſario, uel maior, uel minor angulo* B. *Tranſit igitur circulus per punctum* B, *quod eſt propoſitum.*



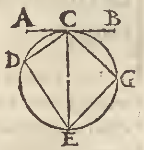
31. *tertij.*

21. *primi*

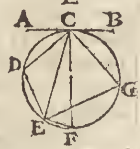
THEOR. 28. PROPOS. 32. 31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem eſſe angulo C G E, in alterno ſegmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque ſegmento. Tranſeat enim primo recta C E, per centrum. Erit igitur uterque angulus A C E, B C E, rectus: ſunt autem & anguli C G E, C D E, in ſemicirculis recti; Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis eſt.



18. *tertii*
31. *tertii*



NON tranſeat iam C E, recta per centrum. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F, eritque C F, perpendicularis ad

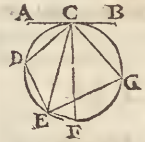
18. *tertii*

31. *tertii* ad A B, & angulus C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, E F C, æquales erunt uni recto, ut angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C E, reliquo C F E, æqualis: Eſt autem angulo C F E, æqualis quoq; angulus CGE, cum uterque ſit in ſegmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam uero in quadrilatero C D E G, duo anguli C D E, C G E, duobus ſunt rectis æquales: Sunt autẽ & duo anguli A C E, B C E, duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat oſtendendum.

21. *tertii*



22. *tertii*



13. *primi*

S C H O L I O N.

P o t e s t theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum ſecantis fecerit cum ipſa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

I n eadem conſtructione tranſeat prius recta C E, per centrum, ſecans circulum CDE, *& ducatur recta* A B, *per* C *faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum.* 31. *tertii* *Quoniam angulus C G E, rectus eſt; erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propoſ. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam uero C E, non tranſeat per centrum, conſtruaturque figura, ut ſupra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E;* 21. *tertii* *in alterno ſegmento maiori, & hic eſt æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo* E C F, *erit angulus* A C F, *æqualis duobus*

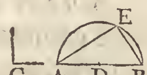
bus angulis E F C, E C F; *Atqui anguli* E F C, E C F, *æquales ſunt uni recto, quod angulus* C E F, *rectus ſit in ſemicirculo, & tres anguli in triangulo* C E F, *æquales ſint duobus rectis. Angulus igitur A C F, rectus quoque erit, ideoque per coroll. propos. 16. huius lib.* A B, *circulum tanget.* 31. tertii 32. primi

EODEM *modo, ſi angulus* B C E, *æqualis fuerit angulo* C D E, *in alterno ſegmento minori, oſtendetur recta* A B, *tangere circulum, Cum enim anguli* B C E, *A C E; duobus ſint rectis æquales: Item duo anguli* C D E, C G E, *duobus rectis æquales; ſi demantur æquales* B C E, C D E *remanebunt anguli* A C E, C G E, *æquales. Quare, ut demonſtratum iam eſt, recta* A B, *circulum tanget.* 13. primi 22. tertii

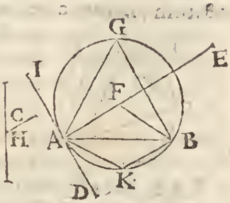
PROBL. 5. PROPOS. 33. 32.

SVPER data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data ſit A B, & datus angulus primo rect⁹ C. oportet igitur ſuper A B, ſegmentũ deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo recto dato C. Diuiſa A B, biſariam in D, deſcribatur centro D; interuallo autem D A, uel D B, ſemicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam angulus A E B, in deſcripto ſemicirculo rectus eſt, ideoque æqualis angulo C, recto. 31. tertii.

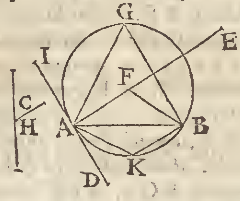


SIT ſecundo angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, q̃ cadet ſupra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angul⁹ F B A, ſecetq; B F, rectã A E, in F. Erũt igitur rectæ F A, F B, æquales. Quare ſi cẽtro 6. primi



F, &

F, & interuallo F A, circulus deſcribatur A G B, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento A G B, quod deſcriptum eſt ſuper A B, eſſe æqualē angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter angulus



32. tertii. D A B, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno.

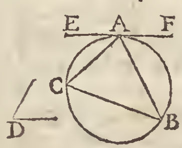
Sit tertio angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, deſcriptumque erit ſuper A B, ſegmentum A K B, in quo angulus K, æqualis eſt angulo alterno I A B, hoc eſt, angulo dato obtuſo H. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33.

PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Datus circulus ſit A B C, a quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo



17. tertii. D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulū ACB, in ſegmento ablato ACB, ęqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim

32. tertii. angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc eſt, angulo D. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

THEOR.

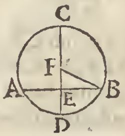
THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

In circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectæ A B, C D, in E; Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis A E, E B, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis C E, E D. Aut enim utraque linea tranſit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Tranſeat primo utraque per cẽtrum. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus, æquale eſſe ei, quod ſub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.

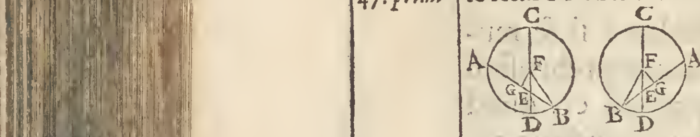


Transeat ſecundo C D, ſola per centrum F, diuidatque prius rectam A B, bifariam, ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta B F. Quoniam igitur C D, diuiſa eſt per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum ſub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato rectæ F D, ideoque. quadrato rectæ F B; Sunt.n. rectæ F D, F B. æquales: Eſt autẽ quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F E, E B; Igitur rectangulum ſub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato commmuni quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B. hoc eſt, rectangulo ſub A E, E B; cum A E, E B, rectæ ſint æquales. 3. tertij. 5. ſecundi 47. primi



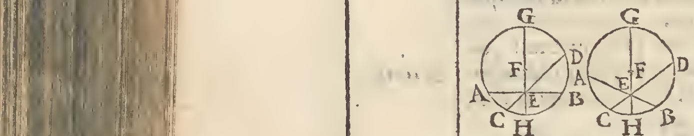
Diuidat iam C D, tranſiens per centrum rectam A B, nõ bifariam. Secetur ergo A B, bifariam in G, ducanturque rectæ F G, F B, eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam uero rectangulum ſub C E, E D, una cum quadrato 3. tertij.

5.ſecundi 47.primi — rectæ F E, æquale eſt quadrato rectæ F D, hoc eſt, quadrato rectæ F B: Eſt autem quadratum rectæ F E, æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F G, G B; Erit rectangulum ſub C E, E D, una cum quadratis rectarũ F G, G E, ęquale quadratis rectarũ F G, G B.



Dempto ergo cõmuni quadrato rectæ F G, remanebit rectangulũ ſub C E, E D, una cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulũ ſub A E, E B, una cum quadrato rectæ G E, æquale eſt eidem quadrato rectæ G B: Igitur rectangulũ ſub C E, E D, una cũ quadrato rectæ G E, æquale eſt rectangulo ſub A E, E B, una cum quadrato eiuſdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale rectangulo ſub A E, E B. quod eſt propoſitum. (5.ſecundi)

Tertio neutra per centrũ tranſeat, ſiue una illarum biſariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum ſectionis E, recta G H. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub A E, E B, æquale eſſe rectangulo ſub G E, E H, ſiue A B, diuidatur biſariam, ſiue non: Item rectangulum ſub C E, E D, æquale eſſe quoq; eidem rectangulo ſub G E, E H, ſiue C D, ſecta ſit biſariam, ſiue non; Erit rectangulum ſub A E, E B, æquale rectangulo ſub C E, E D. quod eſt propoſitum.

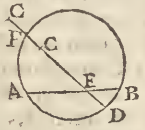


SCHOLION.

Converti poterit theorema iſtud hoc modo.

Si duæ rectæ ita ſe ſecent, ut rectangulum ſub unius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

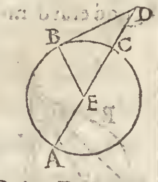
SECENT ſe mutuo rectæ A B, CD, in E, ſitque rectangulum ſub A E, E B, æquale rectangulo ſub C E, E D: Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc eſt, per ea circulum poſſe deſcribi. Deſcribatur enim per tria puncta A, D, & B; circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, oſtendemus ad 5. propoſ. lib. 4.) qui ſi non tranſeat per C, tranſibit aut ultra C, vel citra, ut per F. Quoniam ergo rectangulum ſub F E, E D, æquale eſt rectangulo ſub A E, E B; 35. tertij.
& rectangulum ſub C E, E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo ſub A E, E B: Erunt rectangula ſub C E, E D; & ſub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Tranſibit igitur circulus per punctum C. quod erat propoſitũ.



THEOR. 30. PROPOS. 36. 35.

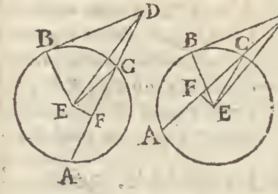
SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera uero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente deſcribitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum ſumatur D, a quo linea ducatur D A, ſecans circulum in C, & linea D B, circulum tangens in B. 17. tertij.
Dico rectangulum ſub D A, D C, æquale eſſe quadrato rectæ D B. Tranſeat enim primo recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, quæ perpendicularis erit ad D B. 18. tertij.
Quoniam igitur C A, diuiſa eſt per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, erit rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ E C, hoc eſt, cum quadrato rectæ E B, 6. ſecundi



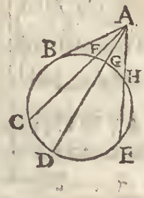
æquale quadrato rectæ D E : Eſt autem quadratum rectæ
47. *primi* D E, æquale quadratis rectarum E B, B D ; Quare rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B; B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale ; Quod eſt propoſitum.

Non tranſeat iam D A, per centrũ E. Diuiſa ergo A C, biſariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F, eritque
18. *tertij.* E B, ad B D, perpendicularis ; & E F, ad A C.
3. *tertij.*



Quoniam igitur C A, diuiſa eſt per æqualia in F, & ei addita recta C D, erit rectangulum ſub D A, D C, una cum
6. *ſecundi* quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum ſub D A, D C, una cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum
47. *primi* D F, F E : Eſt autem quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratum rectæ E C, ideoque quadratũ rectæ EB ; Et quadratis rectarum D F, F E, æquale eſt quadratum rectæ DE. Quare rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadra-
47. *primi* tum rectæ D E, æquale ſit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo cõmuni quadrato rectę B E, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ D B, æquale ; quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

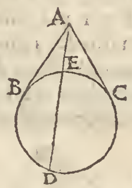
COROLLARIVM. I.



Hinc manifeſtum eſt, quod ſi a puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula cõprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus, inter ſe ſunt æqualia. Vt ſi ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, ſecantes circulum in F, G, H, erunt rectangula ſub A C, A F ; Item ſub

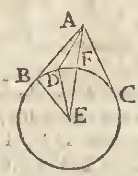
ſub A D, A G; & ſub A E, A H, æqualia inter ſe. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia ſingula dicta rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt. 36. tertij.

COROLLARIVM. II.



CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter ſe eſſe equales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico eſſe æquales inter ſe. Ducta enim recta A D, quæ circulum ſecet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, æquale rectangulo ſub A D, A E; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter ſe æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt. 36. tertij.

COROLLARIVM. III.



PERSPICVVM denique eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quæ circulum tangãt. Si enim præter duas A B, A C, duci poſſit tertia A D, circulum eundẽ tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi ducatur recta A E, erit angulus A D E, maior angulo A B E. 18. tertij. 21. primi

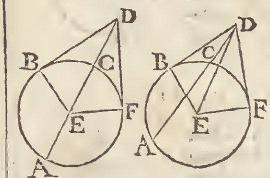
ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta A E, ad centrũ E, quæ circulum ſecet in F, erit A D, cum ſit propinquior minimę A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior eſt. Solum igitur duæ rectę ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum. 8. tertij.

THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, com-

prehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum ſumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum ſecans in C, & recta D B, incidens in circulum, ad punctum B; ſitque rectangulum ſub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Di-
17. tertij. co D B, circulum tangere in B. Ducatur enim A F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod ſi D A, ſecans non tranſeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo ſub D A, D C, æqua-
36. tertij. le eſt quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo ſub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B, erunt quadrata rectarum D F, DB, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter ſe erunt. Itaque quia latera D F, FE, trianguli D F E, æqualia ſunt lateribus D B,
8. primi B E, trianguli D B E, & baſis D E, communis; erunt angu-
18. tertij. li D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D FE, rectus eſt, quod A F, circulum tangat: Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

EST autem hoc theorema conuerſum præcedentis theorematis, vt perſpicuum eſt.

FINIS ELEMENTI TERTII.

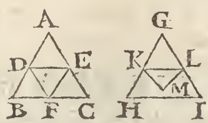
EVCLIDIS ELEMENTVM IIII.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cū ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides in quarto hoc libro de uarijs inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus; nec nõ de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I,



non dicetur triangulum K L M, inſcribi in triangulo G H I; quamuis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.

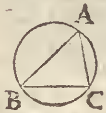
II.

SIMILITER & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circunſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E CONTRARIO dicetur triangulum ABC, deſcribi circa triangulum D E F; quoniam ſingula latera illius ſingulos huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cũ ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.



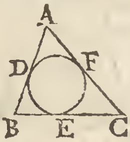
VT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriam circuli A B C; dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriã, nõ diceretur triangulũ eſſe inſcriptũ in circulo.

IIII.

FIGVRA uero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cũ ſingula latera eius, quæ circunſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT

At vero, ſi latera trianguli A B C, ſingula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

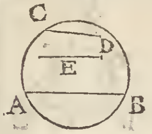
CIRCVLVS autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circunſcribit, angulos.

Vicissim dicetur circulus D E F, inſcriptus eſſe in triangulo A B C: At vero circulus A B C, deſcriptus eſſe circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Vt recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in periphe-



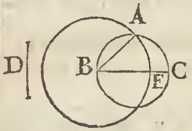
peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, uel C D; quia hæc vnum duntaxat extremum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero nullum.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.

IN circulo A B C, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non ſit diametro circuli dati. (Cum enim diameter ſit omnium rectarum in circulo maxima, ſi data recta, diametro maior foret, non poſſet in circulo aptari illi una æqualis) Ducatur diameter B C. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si uero D, minor fuerit diametro, abſcindatur BE, æqualis ipſi D, & centro B, interuallo autẽ BE, circulus deſcribatur EA, ſecans circulũ A B C, in A; Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. Eſt enim BA, æqualis ipſi B E; & D, æqualis eidẽ BE, per conſtructionẽ: Quare AB, & D, inter ſe æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

15. tertij.

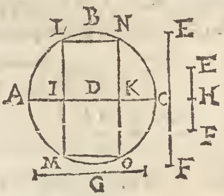


EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accõmodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda ſit recta

ſta ęqualis rectæ E F, quę diametro maior non ſit, & alteri rectæ G, parallela. Ducatur per centrum D, diameter A C, rectę G, parallela. 31. *primi* Quod ſi recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si uero E F, diametro minor fuerit, ea ſecta bifariam in H, abſcindatur DI, ipſi HB, & DK, ipſi HF, æqualis, ut tota IK, toti E F, ſit æqualis. Et per I, K, ad angulos rectos ipſi A C, ducantur LM, NO; iungaturq; L N. 11. *primi* Dico LN, accõmodatam eſſe æqualem ipſi E F, & ipſi G, parallelam. Cum enim L M, NO, ęqualiter a centro diſtent, ipſæ æquales inter ſe erunt: 14. *tertij.* quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos ſecentur a recta A C, per centrum D, tranſeunte; 3. *tertij.* erunt & earum dimidię L I, N K, æquales.

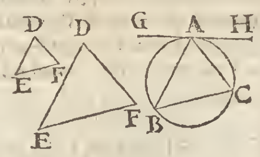


Quia uero L I, N K, parallelę etiam ſunt; erunt quoque L N, I K, 28. *primi* æquales, & parallelę, 33. *primi.* Quare cum I K, æqualis ſit ipſi E F, & parallela ipſi G; Erit etiam L N, æqualis ipſi E F, & ipſi G, parallela. 30. *primi* Eadem ratione, ſi recta ducatur MO, erit ea æqualis ipſi E F, & parallela ipſi G. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

Sit in circulo ABC, dato deſcribendũ triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo F, ęqualis, & angulus HAC, angulo E; atq; extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam uſque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Dico triangulum ABC, circulo dato inſcriptum, eſſe



æquiangulum dato triangulo D E F. Eſt enim angulus C, æqualis angulo G A B; 32. *tertij.* & eidem angulo G A B, æqualis eſt angulus F, ex conſtructione: Quare anguli C, & F, inter ſe quoq; erũt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis eſt angulo HAC, & eidem angulo HAC, ęqualis eſt, per cõſtructionẽ, 32. *tertij.* angul⁹ E; erũt etiã anguli B, & E, inter ſe ęquales.

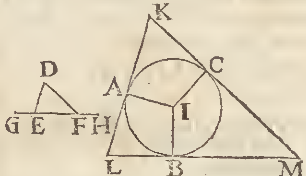
Cum

Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, erunt quoque
32. primi reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum eſt ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum deſcripſimus, &c. Quod faciendum erat.

3. ## PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, deſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, utrinque ad G, & H, ſumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus BIC, angulo DFH; Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, CI, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis



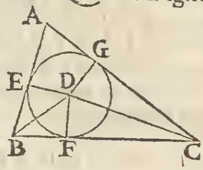
A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K L, M; (ſi enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; quare A K, C K, coibunt, &c.) Deſcriptum eſt igitur circa circulũ triangulum K L M, quod dico eſſe æquiangulũ triangulo DEF. Quoniam omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales ſunt quatuor rectis, ut ad 32. propo. lib. 1 oſtenſum fuit; & anguli I A L, & IBL, ſunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli D E G,
13 primi. D E F, ſint duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales A I B, & D E G, remanebit angulus L, angulo DEF æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe
32. primi angulo D F E. Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere. 4.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo A B C. Diuiſis duobus angulis A B C A C B, biſariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales ſunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, uterque utrique; & latus B D, commune; erunt quoque latera D E, D F, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetq; latera trianguli in E, F G, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod perpendicularia ſint ad ſemidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

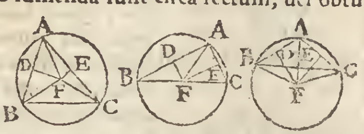


26. primi

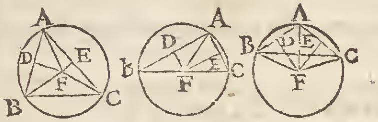
PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulũ ABC Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, uel obtuſangulo ſumenda ſunt circa rectum, uel obtuſum angulum) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet.



tet. Nam ſi ducta eſſet recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel in latere BC, uel extra triãgulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera



AD, DF, trianguli ADF, æqualia ſunt lateribus BD, DF,
4. primi triãguli BDF, & anguli ad D, recti: erũt baſes FA, FB, ęquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum FA, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

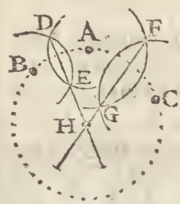
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi uero ſit in latere B C, angulum BAC, eſſe rectum, quod ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulũ BAC, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.

Contra uero perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum.

SCHOLION.

Colligitur etiam ex hoc problemate, quanam arte deſcribendus ſit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea exiſtentia tranſeat. Nam ſi data puncta tribus rectis iungantur, ut conſtituatur triangulum, facile circa ipſum circulus deſcribetur. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propoſ. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus deſcribantur ſe interſecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H.

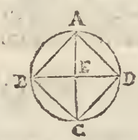


D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo, uel etiam, ſi placet, eodem, alij duo arcus delineentur ſecantes ſe ſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, ſecans rectam D H, in H. Dico H, eſſe centrū circuli tranſeuntis per data puncta A, B, & C. Nam ſi ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, biſariam a rectis D H, F H, ceu demonſtratum eſt in praxi illa propoſitionis 25. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides oſtendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, deſcripti. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. *6.*

IN dato circulo quadratum deſcribere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, ſecantes ſeſe ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, eſſe quadratum inſcriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia ſunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia ſint ex centro; & anguli contenti ſunt recti; erūt baſes A B, B C, æquales. *4. primi* Eadem ratione æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter ſe ſunt. Sunt autem & anguli recti, cum omnes in ſemicirculis exiſtant. *31. tertij.* Quare quadratum erit A B C D; proptereaque in dato circulo quadratum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

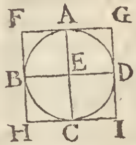


PROBL. 7. PROPOS. 7. *7.*

CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, deſcribendum

deſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, ſecantes ſe in E, centro, ad angulos rectos, & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico F H I G, eſſe quadratũ circa circulum datum deſcriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, ſint recti, erũt



28. primi F H, A C, parallelæ; ſimiliterque erunt

30. primi G I, A C, parallelæ. Quare & F H, GI parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum eſt

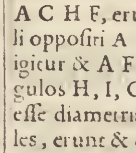
34. primi A C H F, erunt latera oppoſita A C, F H, æqualia, & anguli oppoſiti A C H, A F H, æquales: ſed A C H, eſt rectus, igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione oſtendemus, angulos H, I, G, rectos eſſe, & latera H I, I G, G F, æqualia eſſe diametris B D, A C. Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum deſcribere.

SIT in dato quadrato A B C D, inſcribendus circulus. Diuiſis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, ſecantes ſe in I. Quoniam igitur A D, B C. rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. Qua-



33. primi re & A B, parallela eſt, & æqualis ipſi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipſi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E; ſunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint dimidiæ æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E IF, IG,

I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad interuallum I E, tranſibit quoque per puncta F, G, H; qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat. 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.

SIT deſcribendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera A B, D, A trianguli A B D, æqualia ſunt; erunt anguli A B D, A D B, æquales: eſt autẽ angulus B A D, rectus; Quare A B D, A D B, ſemirecti erunt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, ſint æquales; erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, deſcriptus, interuallo E A, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulũ deſcripſimus, quod erat faciendũ. 5. primi 32. primi 6. primi



SCHOLION.

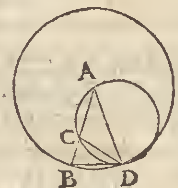
QVOD ſi circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inſcribatur, erit quadratum circumſcriptum quadrati inſcripti duplum. Quoniam latus quadrati circumſcripti æquale eſt diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. conſtat, hoc eſt, diametro quadrati inſcripti: quadratum uero diametri duplum eſt quadrati, cuius eſt diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. oſtendimus; Conſtat propoſitum.



10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulũ conſtituere; quod habeat utrumq; eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quę diuidatur in
11. ſecundi C, ita ut rectangulũ ſub A B, B C, æquale ſit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo uero A B, circulus deſcri-
1. quarti batur, in quo accommodetur recta B D, æqualis ipſi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales ſunt, erit triangulum A B D, Iſoſceles. Dico utrumq; angulorum A B D, A D B, duplum eſſe reliqui anguli A. Ducta enim recta



5. quarti. C D, deſcribatur circa triangulũ A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum ſub A B, B C, æquale eſt quadrato rectę A C, hoc eſt, quadrato rectæ B D; & recta A B, ſecat circulum D C A: tanget re-
37. tertij. cta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus
32. tertij. B D C, æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento C A D. Addito igitur cõmuni C D A, erit totus angulus A D B, æqua-
32. primi lis duobus angulis C A D, C D A; ſed his eiſdem æqualis eſt etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis
5. primi erit angulo A D B, hoc eſt, angulo A B D, cum A B D, A D B,
6. primi æquales ſint; ac propterea rectæ C D, B D, æquales erunt: Eſt autẽ B D, æqualis poſita rectæ A C. Igitur & C D, ipſi
5. primi C A, æqualis erit, ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Cum igitur angulus A, ęqualis ſit oſtẽſus angulo B D C, erũt quoque anguli B D C, C D A, æquales; ac propterea angulus A D B, duplus erit anguli C D A, hoc eſt, anguli A, ſibi ęqualis. Quare & angulus A B D, duplus erit eiuſdẽ anguli A. Iſoſceles ergo triangulum cõſtituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.

SCHOLION.

NON eſt autem quod ſe excrucient Campanus, & Peletarius, ut probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, ut cũ nullo

nullo modo ſecet. Nã propterea quod quadratũ rectæ B D, æquale eſt rectangulo ſub A B, BC, oſtenſum eſt in ultima propoſ. 3. lib. rectam B D, perpendicularẽ eſſe ad ſemidiametrũ circuli ex D, ductam. Quare circulũ tanget, & nulla ratione ſecabit.

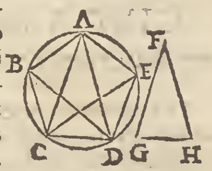
PROBL. 11. PROPOS. 11.

11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Conſtruatur triangulum Iſoſceles FGH, ita ut uterq; angulorũ G, H, duplus ſit reliqui F. & in circulo inſcribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo F G H, & uterq; angulorũ A C D, A D C, biſariam diuidatur rectis C E, D B; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum A C D, A D C, duplus ſit anguli C A D; & diuiſus biſariam; erunt quinque anguli A D B, BDC, C A D, D C E, A C E, æquales. Quare arcus AB, BC, CD, DE, E A, ſuper quos aſcenderunt, atq; idcirco & rectæ AB, BC, CD, D E, E A, æquales erunt. Aequilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, E D, æquales ſunt, addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB; Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus inſiſtẽtes æquales erunt. Eodẽ modo æquales erunt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulũ eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cũ & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptũ erit in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendũ erat.

10. *quarti*
2. *quarti*
9. *primi*
26. *tertij.*
29. *tertij.*
27. *tertij.*



SCHOLION.

QVOD ſi detur recta linea terminata C D, ſuper ea

 conſti-

10.quarti *conſtituemus petagonum æquilaterum, & æquiangulum; hoc modo. Fiat triangulum Iſoſceles F G H; habens quemlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde conſtituant anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coeantq; rectæ C A, D A, in A, quæ efficient*



32. primi *angulum C A D, æqualem angulo F; atque propterea trianguli A C D, vterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam vero circa triangulum A C D,*
5.quarti *circulus deſcribatur A B C D E; In quo cum ſit inſcriptum triangulum A C D, ſi anguli A C D, A D C, bifariam ſecentur, inſcribetur ut prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus eſt recta C D. Quod eſt propoſitum.*

12.
PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit circa datum circulum A B C D E, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inſcribatur in
11.quarti eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducant perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeuntes in G, H, I, K, L, Cum .n. anguli G A E, G E A, duobus ſint rectis minores, coibunt



11. pron. rectæ A G, E G, ad partes G, & ſic de alijs. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico eſſe æquilaterum, ac æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erunt quadrato rectæ F H,
47. primi æqualia tam quadrata rectarum F A, A H, quam rectarum F B, B H: Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebũt quadrata rectarũ A H, B H, æqualia; ideoq; & rectæ A H, B H,

BH, æquales erunt. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia ſunt lateribus B F, F H, trianguli BFH; Eſt autem & baſis A H, baſi B H, æqualis, ut oſtenſum eſt: erunt anguli A F H, B F H, æquales; Igitur & anguli A H F, B H F. Duplus igitur eſt angulus A F B, anguli B F H; & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo oſtendemus, angulum B F C, duplum eſſe anguli B F I, & angulū B I C, anguli B I F. Cum igitur anguli AFB, BFC, ſint æquales, quod inſiſtant circunferentijs A B, BC, quæ æquales ſunt, cum a rectis æqualibus ſubtendantur A B, BC; erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales ſint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F; erunt & latera B H, B I, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla eſt ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione oſtendemus G H, rectam duplam eſſe rectæ H A: Sunt autem oſtenſæ æquales H B, H A; igitur & earum duplæ H I, H G, æquales erūt. Similiter demonſtrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales eſſe cuilibet rectarum H I, H G. Aequilaterum ergo eſt pentagonum G H I K L. Rurſus quoniam oſtenſum eſt angulos B H F, B I F, æquales eſſe, ac dimidios angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, erunt æquales cuilibet angulorum B H A, B I C Aequiangulum igitur eſt pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod efficiendum erat.

8. primi
4 primi.
27. tertij.
28. tertij.
26. primi

PROBL. 13. PROPOS. 13.

13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

Sit inſcribēdus circulus in dato pentagono ABCDE; Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF, *9. primi*

 ſint

ſint minores duobus rectis, coibunt neceſſario rectæ A F B F: Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniã igitur latera A B, B F, trianguli A B F; æqualia ſunt lateribus CB, BF, triãguli CBF; Sunt autẽ & anguli ipſis contenti æquales ABF, CBF, erunt



4. primi bafes A F, CF, & anguli B A F, BCF, æquales. Cum igitur anguli B A E, B C D, ponãtur æquales, & B A F, dimidium ſit anguli B A E, per conſtructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuiſus eſt ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA; diuiſos eſſe bifariam. Ducantur iam ex F, ad ſingula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G; trianguli F A G, æquales ſunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; eſtque latus A F ſubtenſum uni æqualium angulorum, commune; erunt &

26. primi rectæ F G, F L, æquales. ſimiliterque oſtendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet iſtarum. Circulus igitur deſcriptus ex centro F, & interuallo F G, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per corroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cũ rectis F G, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

14.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ circulũ deſcribere.

SIT circa pentagonũ ABCDE, æquilaterũ, & æquiangulum, circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis BAE, ABC, bifariã rectis A F, B F, quæ coeant in F; & coniũctis rectis F C, F D, F E, oſtẽdemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos B C D, C D E, D E A, ſecari bifariã; Erunt ergo oẽs anguli dimidij inter ſe æquales, quod toti anguli æquales ponãtur. Quoniã igitur in triãgulo A F B, duo



duo anguli æquales ſunt FAB, FBA; erunt; rectæ FA, FB, æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro F, interuallo autē FA, tranſibit quoq; per puncta B, C, D, E. Circa datū ergo pentagonū, &c. Quod faciendum erat. 6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

Sit in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inſcribendū hexagonum æquilaterū, & æquiangulum. Ducta diametro A D, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo uero D G, qui ſecet circulū datū in punctis C, & E, e quibus per centrū G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur cōnectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico eſſe & æquilaterum, & æquiangulum. Cū enim recta G C, æqualis ſit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, DC, æquales inter ſe. Ideoq; triangulum C D G, erit æquilaterū. Quare tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter ſe erunt: qui cum æquales ſint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars unius recti. Eodē modo erit angulus DGE, tertia pars unius recti. Sunt autē tres anguli CGD, DGE, EGF, ęquales duobus rectis: Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars eſt unius recti. Sūt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter ſe ęquales; quibus cū etiā ęquales ſint anguli FGA, AGB, BGC; erūt ſex anguli ad cētrū G, ęquales. Quare circūferentię, quibus inſiſtūt, ac propterea rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, ęquales erunt. Quapropter ęquilaterum eſt hexagonū ABCDEF. Rurſus quia circunferentia BC, æqualis eſt circunferentiæ AF; ſi addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtentes BAF, ABC. æquales erunt. Similiterq; oſtēdemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales eſſe cuilibet iſtorū. Quare ęquiangulū quoq; eſt hexago



5. primi
32 primi.
13. primi
15. primi
26. tertij.
29 tertij.
27. tertij.

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonũ æquilaterum, & æquiangulum deſcripſimus. Quod faciendũ erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, Hexagoni latus æquale eſſe ſemidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale eſt ſemidiametro D G, ex definitione circuli.

Caeterum per ea, quæ dicta ſunt de pentagono, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono ęquilatero, & ęquiangulo circulum inſcribemus, & tandem circa idem hexagonum deſcribemus circulum.

16. PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit in dato circulo A B C, inſcribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Conſtituto triangulo

2. *quarti* æquilatero D, inſcribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ,

28. *tertij.* eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. Qualium igitur partiũ æqualium quindecim eſt circunferẽtia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, ꝗ tertia pars eſt totius circunferentiæ. Inſcribatur rurſus in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum



11. *quarti.*

28. *tertij.* A E F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A.

HA, æquales. Qualium igitur partium æqualiū quindecim eſt tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars exiſtens totius circunferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiſo ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, ſubtendet decimam quintam partem totius circunferentiæ; cui ſi aliæ quatuordecim æquales in circulo accomodentur, inſcriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangulum eſt, cum eius anguli ſubtendant arcus æquales, ut perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod erat faciendum.

30. tertij.
1. quarti
27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propos. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum; Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus, & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

SCHOLION I.

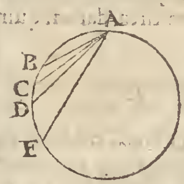
Ex huius problematis ſtructura, atque demonſtratione colligi poteſt methodus, ac ars quædam, qua infinitæ propemodū figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod ſit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B; hoc eſt, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5, binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiſo arcu B E, bifariam in I, erit ſubtenſa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonſtratum fuit. Hac fere arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur

duo

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter dicta latera incluſus, tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter ſe differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo A B C D E, initio ſemper facto a puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem A B, pentagoni uero A C, & quadrati A D, trianguli deniq; æquilateri A E. Quoniã igitur denominator lateris AB nempe 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. vnitate; continebit arcus B C, inter dicta latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circunferentia, taliũ 5. eſt arcus AB, ſexta pars circunferentiæ; & talium 6. eſt arcus A C, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus B C, unam talem continebit partem. Pari ratione arcus B D, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris A B, uidelicet 6. ſuperat denominatorem lateris A D, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus B E, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus uero C D, complectetur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus C E, duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique D E, continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inueſtigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.



EX CAMPANO.

OMNIS figura æquilatera circulo inſcripta, aut circunſcripta,

eſt

eſt quoque æquiangula. Nam figuræ inſcriptæ anguli, cum inſiſtant arcubus æqualibus, æquales erunt. Anguli uero circunſcriptæ, æquales oſtendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta, quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono eſt factum, propos. 12. 27. tertij.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inſcribere, talem etiam ſciemus deſcribere circa circulum, & in ea circulum quoque inſcribere, & circa eandem deſcribere circulum, ſi artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inſcripta figura quacunque æquilatera & æquiangula in circulo, inſcribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuiſis etenim arcubus, quos latera ſubtendunt, bifariam, & ſubtenſis rectis lineis, conſtat propoſitum. Vt per triangulum æquilaterum inſcriptum inſcribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterū, figuræ 32. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLION II.

OMNES figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inſcribi poſſunt officio Iſoſcelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Peletarius.

IMPARIVM enim laterū figuræ inſcribent officio triangulorū Iſoſceliū, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad uerticem ſunt, angulorum. Vt officio Iſoſcelis, cuius uterque angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad uerticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulū æquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulū æquilaterū erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterq; angulorū ad baſin duplus ſit eius, qui ad uerticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterū, utpote pentagonū, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, ueluti propos. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonū, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triãgulū Iſoſceles habens utrumq; angulorum ad baſin triplum eius, qui ad uerticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticē. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale eſt Hennagonum, in circulo inſcribetur officio Iſoſcelis, cuius uterq; angulorū ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad uerticem, ſi uterq; diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c. 6. primi 23. primi 23. primi

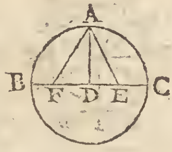
PARIVM

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inſcribentur, officio Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt quadratum conſtituens primam figuram parium laterum, inſcribetur officio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin ſeſquialter eſt anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem inſiſtit quartæ parti circunferentiæ. Cum enim duo anguli ad baſin ſimul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem; ſubtendent ipſi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc eſt, ſecunda figura laterum parium, inſcribetur officio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſeſquialter eſt eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, inſiſtit ſextæ parti circunferentiæ, cum reliqui anguli ſimul compoſiti contineant ipſum quinquies. Ita quoque Octogonum, id eſt, tertia figura laterum parium, inſcribetur officio Iſoſcelis habentis vtrunque angulorum ad baſin triplum ſeſquialterum angulo ad uerticem, &c.

SI igitur inuenta fuiſſet ars, qua Iſoſcelia triangula conſtruerentur habentia angulos ad baſin multiplices eorum, qui ad uerticem ſunt, angulorum, quemadmodum Euclides Iſoſceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad baſin duplū anguli ad uerticem, facile in circulo deſcriberentur figuræ omnes laterum imparium. Quod ſi arcus earum diuiderentur bifariam, inſcriberentur quoque omnes figuræ parium laterum, atque adeo quælibet circunferentia circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuideretur. Quæ res ſummam Aſtronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota exſtit: Non enim recte ſibi eam uendicat Orontius Finæus in libello hactenus, ut ipſe ait, deſiderato, de abſoluta rectilineorum omnium deſcriptione intra circulum, &c. cum eius demonſtrationes falſæ ſint, ac ſophiſticæ, ut Geometrice oſtenſum eſt a Petro Nonio Luſitano in libello de erratis Orontij.

QVONIAM vero longa eſt, atque difficilis ea inſcriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ conſtructionis, in circulo dato inſcribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus

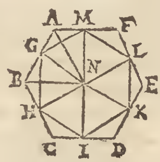
culus A B C ; cuius centrum D ; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æquales abſcindatur EF. Itaque ſi ducatur recta AF, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inſcribendi, ut ipſe demonſtrat. Cæterum cum demonſtratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non uidetur hoc loco ſcribenda, ſed in proprium locum, utpote in propos. 13. differenda.



NON erit autem præter inſtitutum noſtrum, aut ab hoc libro alienũ, ſi ſequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

SI bifariæ ſectiones laterum figuræ ęquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idem centrũ habens.

SIT enim figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius latera bifariam ſecentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inſcriptam figuræ ABCDEF, æquilateram eſſe quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Aequilatera quidem erit, quoniam eius latera ſubtendunt angulos æquales cõprehenſos æqualibus rectis, utpote dimidijs laterum æqualium, æqualia ſunt. Quoniam uero tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quam tres F L M, M L K, K L E, duobus ſunt rectis æquales; Sunt autem A M G, L M F, F L M, K L E, inter ſe æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, ſubtendanturque a baſibus æqualibus: Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hiſce, & inter ſe æquales eſſe. Aequiangula igitur quoque eſt figura G H I K L M. Quod



4. primi
13. primi.
8. primi.
13. primi

autem

autem idem habeat centrum, ita oſtendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inſcriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunctis quoque rectis N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia ſunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; ſuntq́; baſes A N, B N, cum ſint ſemidiametri circuli circa figurā deſcripti, æquales: Aequales erunt an-



8 primi guli A G N, B G N, ideoq́; recti. Quare N G, perpendicularis eſt ad latus A B; Eodemq́; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum oſtendant diſtantias rectarum A B, B C, &c.
14. tertij. æqualium a centro N; æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, deſcriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet: Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M. Quod eſt propoſitum.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM V.

DEFINITIONES.

I.

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in præcedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua abſolute conſiderata: Nunc uero in duobus ſequentibus de eadem diſputat non abſolute, ſed pro ut una ad aliam refertur, hoc eſt, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. In hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, nõ deſcendendo ad ullam eius ſpeciem, ut ad lineam, ſuperficiẽ, vel corpus aliquod. In 6. lib. uero oſtendit, quamnam proportionem habeant inter ſe lineæ, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur inſtitutum ſuum ſeruet, definit prius uocabula, quæ ad demonſtrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter ſumpta, metitur magnitudinem B; ſexies autem ſumpta, magnitudinem C; dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At



At uero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, ſed ſumpta bis, excedit magnitudinem E, & ſumpta ter, deficit a magnitudine F, ſumpta autem quater, eandem ſuperat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem eſt pars apud Mathematicos: Quædã metitur ſuum totum, ita ut aliquoties repetita totum ſuum conſtituat; qualis eſt numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur ſuum totum, ſed aliquoties ſumpta ipſum uel excedit, vel ab eodẽ deficit: cuiuſmodi pars eſt numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici ſolet aliquota, poſterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc in loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc ſolum metitur ſuum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri ſuum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. conſtabit, pars aliquanta non dicitur ab Euclide pars, ſed partes. Nam numerus 4. non eſt pars huius numeri 6. ſed duæ partes tertiæ, quales ſunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonſtrationibus huius quinti libri pars ſumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum ſane eſt, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos eſt etiam Peletarius, contendere, partem hoc in loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonſtrationibus etiam ipſi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in ſuperiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex eſt magnitudinis A; quoniam hæc utramq; illam metitur. At uero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex eſt dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metiatur. Itaque pars ad multiplex re-

ſertur, & multiplex ad partem, ita minor quantitas menſurãs maiorem, dicatur pars maioris; Maior uero menſurata a minori, dicatur minoris multiplex.

Satis autem perſpicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam eſſe eam, quæ perfecte metitur ſuum totũ. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut uult Peletarius, eſſet iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipſius 6. quod eſt abſurdum.

III.

RATIO eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam, ſecundũ quantitatem, habitudo.

Qvando duæ quantitates eiuſdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo ſolida, &c. inter ſe comparantur ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna maior eſt, quam altera, uel minor, uel æqualis; appellatur huiuſmodi comparatio, ſeu habitudo mutua, Ratio, ſeu (ut alijs placet) Proportio. Itaque ſi comparetur linea aliqua cum ſuperficie quapiam, uel numerus cum linea, non dicetur ea cõparatio proportio, quod neque linea, & ſuperficies; neque numerus, & linea, ſint eiuſdem generis quantitates. Similiter ſi conferatur linea aliqua cum alia linea ſecundum qualitatem, hoc eſt, ſecundum quod una eſt alba, & altera nigra; aut quod vna eſt calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ ſint eiuſdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit ſecundum quantitatem.

Qvamvis autem in ſolis quantitatibus proprie reperiatur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam ſapiunt quantitatis, cuiuſmodi ſunt tempora, ſoni, uoces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, ſi eorum habitudo conſideretur ſecundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore eſſe maius, vel minus, vel duo tempora eſſe æqualia, &c. appellabitur eiuſmodi habitudo, proportio; quoniam tempora conſiderantur, veluti quantitates.

Caetervm in omnĩ proportione ea quantitas, quæ ad

aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea uero, ad quam alia refertur, conſequens proportionis dici ſolet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis conſequens. Quod ſi econtrario conſideretur proportio lineæ 3. palmorum, ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; conſequens uero linea 6. palmorum, & ſic in cæteris.

DE PROPORTIONIBVS.

OPERAE *pretium eſſe arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam ſint genera proportionũ apud Mathematicos, uel ob hanc præcipue utilitatem, ut ea, quæ in his duobus libris ab Euclide demonſtrantur de proportionibus magnitudinum, rebus poſſint materialibus accommodari, quando opus fuerit.*

PROPORTIO *igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi. Qualis eſt proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris 20. & 10. oſtenditur. Irrationalis uero proportio ea eſt, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis eſt proportio diametri cuiuslibet quadrati, ad latus eiuſdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non poteſt, ceu in 10. lib. ab Euclide demonſtratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam eſſe, quam habent quæuis duæ quantitates commenſurabiles: Irrationalem uero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommenſurabiles. Dicuntur autẽ quantitates commenſurabiles, quæ habent unam cõmunem*

munem partem aliquotam, ſeu quas eadem menſura metitur. Cuiuſmodi ſunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorũ eſt utriuſque pars aliquota, ſimiliter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineã 20. palmorum; Ita quoque eadem lineam 8. palmorum menſurat. Non aliter omnes numeri, commenſurabiles dicentur, quia ſaltem unitas omnes metitur. Quantitates uero incommenſurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, ſeu quarum nullam menſuram communem contingit reperiri: Cuiuſmodi ſunt diameter, & latus eiuſdem quadrati. quamuis enim quælibet harum linearũ infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidiam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumuis minima, alteram metiri poteſt, ut demonſtratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommenſurabiles oſtenduntur, præter dictas duas. Itaque in numeris inuenitur ſola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

Alio modo diuidi ſolet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, eſt inter duas quantitates æquales, ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorũ, & lineã 10. palmorũ, &c. Inæqualitatis uero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum ſuperioribus duo-

bus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis ſit neceßario rationalis, ſed non contra. Omnis item proportio irrationalis neceßario ſit proportio inæqualitatis, ſed non contra. Ex quo manifeſtum eſt, non recte a quibuſdàm diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceßario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non recte diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiuſmodi proportio e contrario eſt proportio inæqualitatis; cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Poſteriori uero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut a nobis factum eſt.

RVRSVS *proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius ſub diuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeāt proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio eſt, quādo maior quātitas cum minore confertur; qualis eſt proportio* 20. *ad* 10. *Item lineæ* 8. *pedum ad lineam* 6. *pedum, &c.*

Pro-

Proportio minoris inæqualitatis eſt, quādo minor quā titas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis & ſuperuacanea, ut multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. Sed multum inter ſe differunt, cum ualde diuerſus ſit uſus utriuſque, ut perſpicuum eſt ijs, qui uel mediocriter in rebus geometricis, & regula Algebræ ſunt uerſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniā de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Pari ratione proportio minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modo ſingulis uocabulis præponatur præpoſitio (ſub) ut in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularem, & ſubmultiplicem ſuperpartientē. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora uero duo ex illis tribus compoſita, ut manifeſtū eſt. Cur uero tantum ſint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, prope finem omnium proportionum oſtendemus.*

PROPORTIO Multiplex, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet, qualis eſt proportio 20. ad 4. Nam 20. comprehendunt 4. quinquies. Item lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c. Hæc autem ſub ſe continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorẽ bis tantũ continet, dicitur proportio dupla; ſi ter, tripla; ſi decies, decupla; ſi centies, centupla, &c. Itaque proportio octupla nil est aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodem modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: ut proportio quincupla, qualis eſt 40. ad 8. dicitur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10 cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & ſic de reliquis.

PROPORTIO ſuperparticularis, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper unam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiam, tertiam, quartam, &c. qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & adhuc unitatem, quæ dimidia pars eſt 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & adhuc lineam 3. pedum, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedum, &c. Hæc quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, eſt medietas minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſqui-

ſeſquialtera; Si eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c. Vnde ex ipſomet uocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quãdo maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. & inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

PROPORTIO *ſuperpartiens, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotã. qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres unitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Conſtat autem ternarium ex illis compoſitum, non eſſe partem unam aliquotam numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere unam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu uidentur eſſe ſuperpartientes, cum tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quamuis enim 10. contineant ſemel 8. & duas unitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8. tamen quia binarius ex illis unitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque, ut duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, ut maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant*

unam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter ſe confundunt. Diuiditur primo proportio ſuperpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem ſemel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non conſtituentes unam, conficitur proportio ſuperbipartiens; ſi três partes aliquotas, ſupertripartiens; ſi decem, ſuperdecupartiens, &c. Diuiditur *deinde quodlibet horum generum, habita ratione partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio ſuperbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarũ maior continet minorem ſemel, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperbipartiens tertias. Quod ſi duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur ſuperbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur ſuperdecupartiens undecimas; Quod ſi decem illæ partes ſint decimætertiæ, uocabitur proportio ſuperdecupartiens decimastertias; & ſic de reliquis omnibus ſuperdecupartientibus proportionibus. Ne autem proportiones ſuperpartientes uel inter ſe cõfundantur, uel cum proportionibus ſuperparticularibus, diligenter conſideranda ſunt ea, quæ ſequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuſcunq; proportionis ſuperpartientis, duos indicari numeros, quorum alter commonſtrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore ſuperſint; alter uero, quotæ partes, aut quãtæ ſint, indicat. Vt in proportione ſupertripartiente octauas, denotan-*

denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior ſignificat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere ſemel minorẽ, & adhuc tres eius partes aliquotas; poſterior autem oſtendit, illas tres partes aliquotas, eſſe partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, eiuſmodi eſſe debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, præter unitatem, quæ quidem eſt omnium numerorũ pars aliquota. Tales ſunt duo prædicti numeri 3. & 8. Nam ſola unitas, ut conſtat, eſt utriuſque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3: & 6. habent præter unitatem aliã cõmunẽ menſurã, uidelicet 3. Nã ternarius ſemel ſumptus, ſe ipſum, & bis repetitus, ſenariũ metitur. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cũ maior quãtitas cõtineat ſemel minorẽ, & eius partẽ dimidiã. Eadẽ rõne nõ recte dicetur proportio inter 10. & 6. ſuperquadripartiẽs ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habẽt 2. cõem partem aliquotã, præter unitatem; atq; ita dicenda erit talis proportio ſuperbipartiens tertias, cũ maior quãtitas cõtineat minorẽ ſemel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur nõ difficile erit unicuiq; denominare cõuenienter oẽs proportiones ſuperpartiẽtes. Perſpicuũ ẽt ex dictis relinquitur, cur proportionẽ ſuperpartientẽ diuiſerimus paulo ante, in proportionem ſuperbipartientem

tertias,

tertias, quintas, ſeptimas, nonas, &c. prætereuntes ſuperbipartientem quartas, ſextas, octauas, decimas, &c. Cum *enim hæ poſteriores omiſſæ, ſint ſuper particulares, confunderentur proportiones ſuperpartientes cum proportionibus ſuperparticularibus, ſi & ipſæ in numerum proportionum ſuperbipartientium referrẽtur. Quo modo autem dignoſcendum ſit, an duo quilibet numeri propoſiti habeant, præter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica edocetur, demonſtrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.*

Proportio *multiplex ſuperparticularis, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, uel quater, &c. continet, & præterea unam eius partem aliquotam; cuiuſmodi eſt proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, utpote cum dupla) & inſuper comprehendunt unitatem, quæ eſt quarta pars minoris; qua in re proportioni ſuperparticulari, nimirum ſeſquiquartæ eadem proportio propoſita ſimilis eſt.* Diuiditur *autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita. Veluti multiplex, in duplam ſuperparticularem; triplam ſuperparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & inſuper unam partem minoris quantitatis aliquotam. Vnumquodque rurſus horum generum in infinita alia ſubdiuiditur, habita ratione proportionis ſuperparticularis. Nam proportio tripla ſuperparticularis, continet ſub ſe triplam ſeſquialteram, (ut quando maior quantitas minorem*

rem ter continet, & præterea dimidiam eius partem;) triplam ſeſquitertiam; triplam ſeſquiquartam, & ita infinitas alias.

PROPORTIO *denique multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis eſt proportio* 11. *ad* 3. *Dixi, non conficientes unam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illæ aliquotæ unam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis: Vt proportio* 20. *ad* 6. *non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis* 20. *contineant ter* 6. *& duas ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt unam tertiam partem: Quare uocabitur proportio tripla ſeſquitertia. Diſtribuitur autem hæc proportio primo, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem; triplam ſuperpartientem, &c. Deinde quælibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c. Poſtremo quæuis iſtarum, habita ratione partium aliquotarũ, in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens, diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile eſt cuiuis ex dictis depromere, &c.*

OMNIA *uero, quæ dicta hactenus ſunt de quinque his generibus proportionum rationalium maioris in-*

inæqualitatis, intelligenda ſunt quoq; de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub,) ut dictum eſt. Nam ſi in exemplis adductis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias: Ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

CAETERVM *ex dictis perſpicue colligitur, nõ poſſe plura eſſe genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam expoſita. Cum enim, ut Euclides demonſtrat propos. 5. lib. 10. commenſurabiles quantitates quæcunque, inter quas, ut diximus, eſt proportio rationalis, inter ſe proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcumque quãtitatum continuarum aſſignari, ſeu exhiberi poſſit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione conſtituitur proportio multiplex: aut ſemel tantummodo, ac præterea unam eius partem aliquotam; & ſic habetur proportio ſuperparticularis; aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque uero alio modo minor quantitas a maiore contineri poteſt. Eadem ratione*

ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis.

QVONIAM *uero non exiguus eſt uſus denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, a quibusnã numeris ſingulæ proportiones denominentur.* Denominator *ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtincte, & aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ, eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ, eſt 1 $\frac{1}{5}$; quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & cæteri Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, ut diximus, oſtendit, quanta ſit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propoſitis exemplis conſtat.*

Ex *dictis autẽ facile colligi poteſt denominator cuiuſq; proportionis.* Denominator *.n. proportionis multiplicis, quæcunque ea ſit, eſt numerus integer; quia maior quantitas aliquoties minorem debet continere. Vt proportionis duplæ denominator, eſt 2. Noncuplæ 9. Centuplæ 100. millecuplæ 1000. &c. Denominatores autem proportionũ ſubmultipliciũ multiplicibus correſpõdentiũ, sũt partes aliquotæ a dictis denominatoribus denominatæ:* Vt *denominator proportionis*

ſubdu-

ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$; *ſubnoncuplæ*, $\frac{1}{9}$: *ſubcentuplæ*, $\frac{1}{100}$: *ſubmillecuplæ*, $\frac{1}{1000}$; *Denominator autē proportionis ſubquintuplæ eſt* $\frac{1}{5}$. *Eodē modo & denominatores aliarū proportionum ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuſcunque proportionis ſubmultiplicis, eſt numerus fractus, cuius numerator perpetuo eſt unitas; denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans, ut ex dictis exemplis patet.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis ſuperparticularis, eſt unitas cum parte una aliquota: quoniam maior quantitas debet minorem ſemel tantum, & unam eius partem aliquotam comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator, eſt* $1\frac{1}{2}$; *ſeſquioctauæ*, $1\frac{1}{8}$; *ſeſquimilleſimæ*, $1\frac{1}{1000}$, *&c. Denominatores autem proportionum ſubſuperparticularium correſpondentium, ſunt fractiones, quarum numeratores una tantum unitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt* $\frac{2}{3}$; *ſubſeſquioctauæ*, $\frac{8}{9}$; *ſubſeſquimilleſimæ*, $\frac{1000}{1001}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, & pro eiuſdem fractionis denominatore, numerus unitate maior: Vt denominator proportionis ſubſeſquidecimæ eſt* $\frac{10}{11}$, *&c.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis ſuperpartientis, eſt unitas cum pluribus partibus aliquotis non efficientibus unam: quia maior quantitas debet ſemel tantum minorem continere, & plures eius partes. Vt denominator proportionis ſupertripartientis*

tis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$; *ſupertripartientis uigeſimas*, $1\frac{3}{20}$; *&c.* Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores ſunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. *Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt* $\frac{7}{10}$; *ſubſupertripartientis uigeſimas*, $\frac{20}{23}$; *&c.* Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſub ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, cui ſi addatur numerus partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadripartientis undecimas, eſt $\frac{11}{15}$; Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio $\frac{5}{8}$. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores.

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis multiplicis ſuperparticularis, eſt numerus cum una parte aliquota: quia maior quantitas continere debet minorem aliquoties, & inſuper unam eius partem aliquotam. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ, eſt* $3\frac{1}{7}$. *Quintuplæ ſeſquinonæ*, $5\frac{1}{9}$, *&c.* Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticulariũ, ſunt fractiones, quarũ numeratores numeri ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt $\frac{7}{22}$; ſubquintuplæ ſeſquinonæ, $\frac{9}{46}$; etc. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multipli-

multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiuſdem fractionis. Vt denominator proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt $\frac{6}{25}$, *&c.*

Denominator *cuiusuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus cum pluribus partibus aliquotis, non conſtituentibus unam: quoniam maior quantitas minorem debet aliquoties comprehendere, & eius plures partes aliquotas non facientes unam. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt* $3\frac{5}{8}$; *quadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $4\frac{2}{5}$, *&c.* Denominatores *uero proportionum ſubmultiplicium ſuperpartientiū, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt* $\frac{8}{29}$: *ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $\frac{5}{22}$, *&c.* Inuenietur *autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimastertias, eſt* $\frac{13}{34}$, *&c.*

Denominator *denique proportionis æqualitatis, perpetuo eſt unitas: quia una quantitas debet alteram ſemel duntaxat continere.*

IIII.

PROPORTIO vero eſt rationum ſimilitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία pleriſque autem latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Vt ſi proportio quantitatis A, ad quantitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc ſimilitudo proportionalitas.



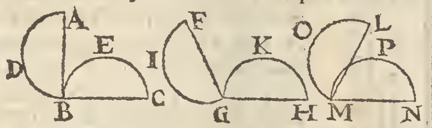
Multæ autem habitudines proportionum, ſeu proportionalitates, (Nos enim comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus; habitudinem autẽ proportionum, Proportionalitatẽ) a ſcriptoribus, præſertim Boetio, & Iordano, deſcribuntur; inter quas primum ſemper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Muſica, ſeu harmonica: Verum Euclides de ſola Geometrica agit in hoc libro; quæ quidem duplex eſt, continua altera, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens vero quantitatis præcedentis. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera uero diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed uel antecedẽs tantum, vel conſequens tantum. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio A, ad B, ea eſt C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſiue non continua.

V.

RATIONEM habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuo ſuperare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinẽ duarum magnitudinum eiuſdem generis, vocauerat proportionem, ſeu rationem; explicat nunc in hac 5. definitione, quidnam requirant duæ quantitates eiuſdem generis, ut proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis ſint eiuſdem generis quantitates, proportionẽ habent inter ſe, ut mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter ſe, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, ut alteram tandem ſuperet; adeo ut ſi alterutra quamtumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiuſdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo poſſit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc eſt, bis ſumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter conſtituant triangulum Iſoſceles, erunt duo latera quadrati diametro eiuſdem maiora. 20.primi. *Ita quoque circunferentia circuli, & diameter eiuſdem, proportionem habent, (quamuis nondum ſit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc eſt, ſumpta quater, circunferentiam ſuperat, cum omnis circunferentia circuli, ut ab Archimede demonſtratur, ter duntaxat comprehendat diametrũ eiuſdem, & particulam adhuc paulo minorem ſeptima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura eſt contenta duobus arcubus circulorum, ad modum Lunæ nouæ, quãdo falcata eſſe cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc eſt, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, ut & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato,*

drato. Hoc idem demonſtratur a Proclo in angulis rectilineis, ac curuilineis. Oſtendit enim, tam recto angulo, quam obtuſo, & acuto, exhiberi poſſe angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas ſemicirculi deſcribantur ADB, BEC.



Quoniã igitur anguli ſemicirculorum ABD, CBE, ſunt æquales; addito communi angulo mixto ABE, fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter oſtẽdes, angulum curuilineum I G K, æqualem eſſe obtuſo F G H; nec non curuilineum O M P, acuto L M N, idummodo hic ab angulis ſemicirculorum L M O, N M P, auferas communẽ angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P; Ex quibus conſtat, alterutrum angulorum multiplicatum, poſſe alterum excedere; quare proportionem inter ſe habebunt. At uero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit ſuperare. Sic neque linea cum ſuperficie, neque ſuperficies cum corpore, eandem ob cauſam, ullam habebit proportionem. Denique non cenſebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc ſemper exiſtit quouis angulo rectilineo, etiã minimo: ceu propos. 16. lib. 3. demõſtrauimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiuſdem generis proportionem dicantur habere, uoluit hac definitione, eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata, alteram poſſit ſuperare, alias non. Hanc ob cauſam in pleriſque demonſtrationibus proportionum, iubet toties multiplicare unam propoſitarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter ſe, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in pleriſque alijs propoſitionibus.

PERSPICVVM eſt ex his, quam inepte, & quam falſo, hanc definitionem expoſuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, ſeu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, ſed qualem proportionem duæ quæcunque

propoſitæ quantitates habeant. Itaque ut inquit, uult Euclides, ſi magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc eſt, ambarum ſumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipſius A, quam multiplex D, ipſius B; habebunt magnitudines A, & B, eam inter ſe proportionem, quam earum æquemultiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc quod ait, non eſſe definitionem, ſed Theorema decimumquintum huius 5. lib. ubi demonſtratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione eſſe, hoc eſt, A, & B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita eſt intelligenda hæc definitio, præſertim cum tam ignota ſit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem ſemper eadem eſt. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B; Eſt ergo ſenſus huius definitionis ille, quem expreſſimus, vt liquido conſtat ex verbis Euclidis.



VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundã, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a ſecundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque uel una deficiunt, uel una æqualia ſunt, uel una excedunt; ſi ea ſumãtur, quæ inter ſe reſpondent.

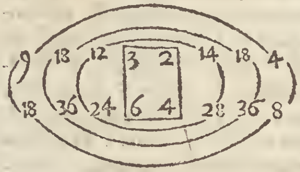
EXPLICAT hoc in loco Euclides, quasnam conditiones requirant apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut rectius exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam

quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta, ſumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C: Item ſumantur ſecundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſiue hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecundæ, & quartæ, ſicut priora duo multiplicia ſunt primæ, & tertiæ, ſiue non. Quod ſi iam inter ſe conferantur ſumpta æquæ multiplicia ea, quæ inter ſe reſpondent, ut multiplex primæ, & multiplex ſecundæ inter ſe, hoc eſt E, & G; Item multiplex tertiæ & multiplex quartæ inter ſe, hoc eſt F, & H; deprehenſumque fuerit perpetuo, ea ita inter ſe ſe habere, ut ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æquale fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi H; Aut denique ſi E, maius fuerit quam G; etiam F, maius ſit quam H; (quod eſt utrumque ab utroque vel vna deficere, uel una æqualia eſſe, uel una excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium poſſit reperiri, ideſt, vt nunquam E, minus ſit quam G, quin & F, minus ſit quam H; & ut nunquam E, æquale ſit ipſi G, quin & F, ipſi H, ſit æquale; Denique ut nunquam E, maius ſit quam G, quin & F, maius ſit, quam H. Si inquam deprehenſum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuo ſe ſe ita habere; vt dictum eſt, dicetur eadem eſſe proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam magnitudinem B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod ſi deprehenderetur aliquando, etiam in ſolo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G; non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale eſſe ipſi G, at F, non æquale ipſi H; Aut denique E, excedere ipſum G, at F, non excedere ipſum H, quamuis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eandem habere proportionem, ſed diuerſas, ceu in defin. 8. fiet perſpicuum.



ITAQVE vt demonſtratione aliqua concludantur quatuor

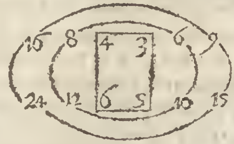
tuor quantitates eandem habere proportionem, oſtendendum erit, quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cũ quibuſcunque æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut exceſſus. Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionẽ, concedatur quoque neceſſe eſt, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut exceſſus conditionem Debẽt enim definitio & definitũ reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonã pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus, quadã æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibuſlibet æquæ multiplicibus ſecundæ & quartæ magnitudinis, utrumque ab utroque una deficiant; alia uero vna æqualia ſint; alia denique una excedant, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondẽt; placuit vnum exemplum adducere in numeris. Sint enim quatuor numeri 3. 2. 6. 4. ſumanturque primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item ſecundi & quarti ſumantur alij æquemultiplices, ut ſeptupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice ſecundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti. Rurſus primi, & tertij ſumantur alij æque multiplices, nimirum ſextupli, 18. & 36. Item ſecundi, & quarti ſumantur alij æque multiplices, ut noncupli 18. & 36. Vides ergo, ita 18. multiplicem primi æqualem eſſe 18. multiplici ſecundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Poſtremo primi, & tertij ſumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item ſecundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem ſecundi, quam 18. multiplicem tertij, 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus in quacunque ſumantur multiplicatione ſemper deprehendatur, vnum trium horum verum eſſe, dicetur eadem eſſe proportio 3. ad 2. quæ eſt 6. ad 4. alias non.



CAMPANVS vero atque Orontius, longe aliter definitionem

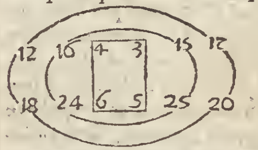
tionem hanc exponunt, Dicunt enim Euclidem uelle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, utrumque ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc eſt, in eadem proportione; uel una æqualia ſunt, vel vna excedunt proportionaliter, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earũ æque multiplicia proportionalia ſunt, id eſt, cũ eandẽ proportionem habet multiplex primæ ad multiplex ſecundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non uidet, ſi ita intelligatur definitio, Euclidem idẽ per idem definire? Quod ſane abſurdum eſt. Præterea ſi Euclides uult, eas magnitudines in eadem eſſe proportione, quarum æque multiplicia (ſi ſumantur, & inter ſe conferantur eo ordine, quo dictum eſt) in eadem proportione exiſtunt; cur obſecro in 4. Theoremate huius libri demonſtrat, ſi fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem oſtendatur, perſpicuum eſt, idem per idem demonſtrari, quod ridiculum eſt; ueluti eo in loco demonſtrabimus. Accedit etiam, ſi ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non poſſe demonſtrari, ut proprijs in locis monebimus. Intelligenda eſt igitur definitio, ut expoſuimus, ita ut, propoſitis quatuor magnitudinibus in eadem proportione, ſi multiplex primæ deficit a multiplici ſecundæ, uel æquale ſit, uel excedat; etiam multiplex tertiæ deficiat a multiplici quartæ, uel æquale ſit, uel excedat, quicunque ſit ille defectus, exceſſusve. Nam in 4. poſtea Theoremate demonſtrabitur, dictum defectum, exceſſumve eſſe proportionalem.

PORRO Campanus conatur oſtendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & exceſſu. Nã ſi de quocumque intelligeretur, eſſent quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadẽ proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. ſumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item ſecundi & quarti, nempe 3. & 5. æque multiplices, ut dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem ſecun-



 di, quam

di, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq́; cernitur ſi primi, & tertij ſumantur quadrupli 16. & 24. ſecundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur ſufficit, vt æque multiplicia accepta una excedant ſe ſe quomodocumque, & non requiritur, ut proportionaliter ſe mutuo ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3, quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cum proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio vero 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendus igitur eſt defectus, aut exceſſus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non ſe ſe excedant proportionaliter, ut conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quamuis enim numeri æque multiplices adducti ſe ſe vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quincuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet.



Quod ſi primi, & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At uero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet æque multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoque multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionē, ut adhuc clarius conſtabit ex 8. definitione.

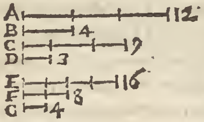
Caeterum definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcumque ſumpta ad 9. & 6. uel vna deficiunt ab æque multi-

multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. uel æqualia ſunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales uocentur.

VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur dictæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales cõtinue, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales ſunt non continue, ſed diſcrete, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.

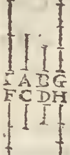


VIII.

CVM uero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

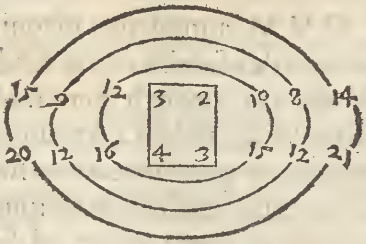
DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debant quatuor magnitudines, ut maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartã, dicens.

dicens. Si ſumpta ſint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehẽſumq́; fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplici ſecundæ, multiplex autem tertiæ non eſſe maius



multiplici quartæ, ſed uel minus, uel æquale; dicetur maior eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam: ut perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumpta ſunt triplicia E, & F, ſecundæ uero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H; Et quoniam E, multiplex primæ maius eſt quam G, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ maius non eſt quam H, multiplex quartæ, ſed minus; idcirco maior eſſe dicetur proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam. Non eſt autem neceſſe, ut quatuor magnitudinum, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, æque multiplicia ſecundum quamuis multiplicationem ſic ſe habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, ut ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque fieri, ut tã multiplex primæ maius ſit multiplice ſecundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item ut & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex primæ ſuperat quidem multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ, uel minus eſt, uel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quam tertia ad quartam, vt perſpicuum eſt in ſequenti exemplo. Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, neceſſe eſt, ut æque multiplicia earum, iuxta quasuis multiplicationes accepta, uel vna deficiant, uel una æqualia ſint, uel una excedant, ceu in 6, defin. fuit expoſitum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, ſatis eſt, ut ſecundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras multiplicationes,

tiones, æque multiplicia primæ, ac tertiæ excedant æque multiplicia ſecundæ, & quartæ. Quod ſi aliquando e contrario multiplex primæ deficiat a multiplici ſecundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorẽ habere proportionem, quam



tertia ad quartam; quamuis ſecundum plurimas multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ deficiant ab æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ. Vt in eiſdem numeris, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

I X.

PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

QVONIAM omnis Analogia, ſeu proportionalitas, quã interpres, vt dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedens, & conſequens, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duo antecedentia, ac duo conſequentia. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſiue magnitudines: At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimũ tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcumque, ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X. CVM

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.



SINT magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E. Proportio igitur A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; vt proportio A, ad B; & B, ad C. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B; propterea quod quatuor proportiones interiiciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi e contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D: At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoq; proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTER-

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione; ſi proponantur aliquot quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Nec enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionē primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperiantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quā habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, ut diximus. Non autem, illam duplam eſſe huius, intellexit, ne Theorema proponeret, quod merito quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius ſit quincupla? At vero, illam dici huius duplicatam, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continue proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare & ſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio eſt einſdē dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecupla, vt hic patet 16. 4. 1.

ITAQVE hoc in loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum ſit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonſtrationes ſequentium librorū percipiantur, rebusq; poſſint materialibus accommodari. Non autem determinat, quæ nam proportio ſit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Quare cum ex propoſitione 20. lib. 6. conſtet, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam eſſe proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus poſterioris, colligendum erit, ſi continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, eſſe eam, quæ eſt primi termini ad tertium; ita ut ſi prioris quadrati latus fuerit

rit trium palmorum, poſterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad poſterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ eſt noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis eſt 9. ad 3. vel 3. ad 1. ut in his numeris 9. 3. 1. perſpicuum eſt. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo eſſe maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum poſterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud ſit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eiſdem his numeris 1. 3. 9. manifeſtum eſt. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonſtratur, ſphæras inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, ſphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad ſphæram, cuius diameter eſt vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, ceu hic perſpicitur 27. 9. 3. 1. &c.

CAETERVM *propoſita quacumque proportione rationali, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſitæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione* $\frac{1}{4}$. *denominatore videlicet proportionis ſubquadruplæ, in ſe, producatur* $\frac{1}{16}$. *dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rurſus in dictum productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, ut hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rurſus ſi in poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propoſitæ proportionis bis poſito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis,*

portionis,

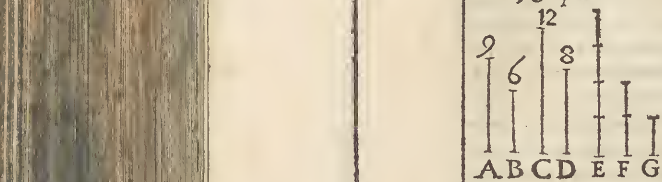
portionis bis poſito, in hunc modum 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At uero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ proportionis denominatore ter poſito, et ſic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter poſito ſic. 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater poſito; Quincuplicata ex eodem quinquies poſito, ac ita multiplicato, &c. Quocirca proportio duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, ſapit naturam quodam modo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportio vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habet conditionem ſuperficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportio, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinet naturam ſolidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodũ etiam cubus ex tribus lineis æqualibus conſurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmedicos, qui Algebræ regulam expoſuerunt, &c.

XI.

HOMOLOGAE, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes uero conſequentibus.

DEFINIVIT ſupra proportionalitatem, proportionũ eſſe ſimilitudinem. Docet iam, non ſolum in proportionalitate quauis proportiones dici ſimiles; Verum etiam terminos ipſos, ſeu quantitates, ſimiles dici, homologas ve, dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, ſeu ſimiles proportione inter ſe, nec non conſequentes inter ſe, vt intelligeremus

in quam plurimis demonſtrationibus, quæ nam latera figurarum inter ſe comparata, antecedentia debeant eſſe proportionum, & quæ nam conſequentia, ceu in 6. lib. perſpicuum fiet.



Si igitur eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, ſimilis quantitati C; & B, ſimilis ipſi D; propter ſimilitudinem enim proportionum, neceſſe eſt, utramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem eſſe vtrique conſequenti, vel eodē modo maiorem, aut minorem; Alias non haberet vtraque antecedens ad vtranque conſequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes maiores ſunt eodem modo conſequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum uides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, vt conſtat. Atque hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. iuſſit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia æque multiplicia ſecundæ, & quartæ magnitudinū, nempe conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione conſtat; in magnitudinibus uero non proportionalibus diſſimiles.

ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus uarie inter ſe conferri poſſe & antecedentes magnitudines, & conſequentes; ceu in ſequentibus definitionibus patebit. Verum ſi verba definitionis diligentius ponderentur, & vſus eiuſdem in 6. lib. cōſideretur, noſtram expoſitionem huic anteferendam eſſe, nemo dubitabit.

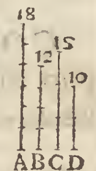
XII.

ALTERNA ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

EXPLICAT hic quoſdam modos argumentandi ex pro-

portionibus.

portionibus, quorum frequentiſſimus eſt vſus apud Geometras. Hi autem ſunt numero ſex. Primus dicitur proportio alterna ſiue permutata: Secundus, inuerſa, ſeu proportio e contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuiſio rationis, uel diſiuncta proportionalitas: Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas: Sextus denique uocatur proportio ex æqualitate, ſeu æqua proportio. Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit, eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandẽ eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem huius. Vt ſi ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem eſſe proportionem A, ad C, quæ eſt B, ad D; dicemur argumẽtari a permutata proportione. Græci ſcriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt eſt A. ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, ſeu viciſſim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem eſſe huiuſmodi illationem, demonſtrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in dicto modo argumentandi, neceſſe eſt, omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdẽ generis, ut inter binas vt ut aſſumptas proportio eſſe poſſit. Non enim recte infertur; Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, ut linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla ſit proportio lineæ ad numerum, aut contra, ut perſpicuum eſt ex defin. 5.

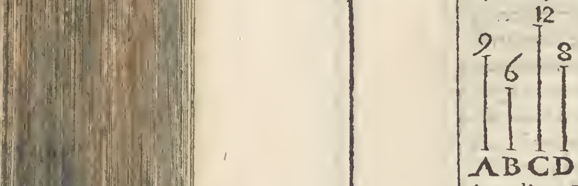


XIII.

INVERSA ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentẽ, uelut ad conſequentem.

VT ſi ex eo, quod eſt A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita eſſe B, ad A, ut D, ad C, hoc eſt, conſequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuerſa proportione. In hac argumentatione ſic fere loquuntur auctores. Vt eſt A, ad

B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, uel e contrario, erit quoq; B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum eſſe, oſtendetur propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines poſſunt eſſe unius generis, & poſteriores alterius. Recte namque licebit inferre; vt ſe habet linea A, ad lineam B, ita ſe habet triangulum, ſeu numerus C, ad triangulum, ſeu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, ſeu numerus D, ad triangulum, ſeu numerum C.



XIIII.

COMPOSITIO rationis, eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ceu unius, ad ipſam conſequentem.

Sit proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius A C, nempe antecedentis cum conſequente, ad B C, conſequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum conſequente, ad E F, conſequentem; Dicitur huiuſcemodi argumentatio compoſitio rationis, eo quod ex antecedente, & conſequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos ſcriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, ut D F, ad E F. Demonſtrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.

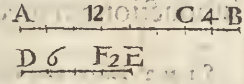


XV.

DIVISIO rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.

Vt

Vt ſi dicatur, quæ proportio eſt totius A B, ad C B, ea eſt totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, exceſſus, quo antecedens cõſequentem ſuperat, ad C B, conſequentem, ut D F, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad F E, conſequentem. In diuiſione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio oſtendetur propos. 17. huius lib.



XVI.

CONVERSIO rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.

Qvod ſi colligamus hoc modo. Sicut eſt tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E; igitur ita etiam erit eadẽ A B, ad A C, exceſſum, quo cõſequentem ſuperat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur proportionem conuertere. Vnde ſic fere loquuntur ſcriptores. Igitur per conuerſionẽ rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus propos. 19. huius lib.

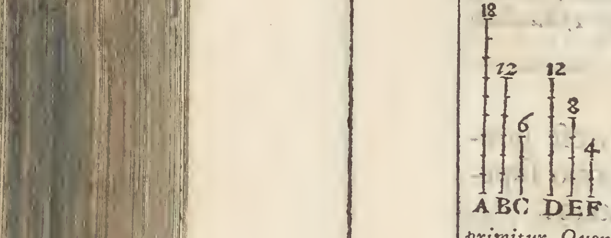


XVII.

EX æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam ſeſe habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidẽ D, E, F, ſintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, primæ ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, primæ magnitudinis ad ultimã in ſecundis magnitudinibus; dicetur huiuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo, ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſubductis medijs, colliguñt habere unã, eandemq; inter ſe proportionem, ceu in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, ſumendo binas ac binas magnitudines in eadem proportione, atque ordinate procedendo; altero vero, cum ordo inuertitur; ſit ut duplex ſit proportio ex æqualitate, non quidem ratione proportionis extremorum, ſed ratione proportionis magnitudinum intermediarum. Id quod clariſſime duæ ſequentes definitiones explicant.

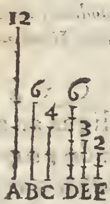


XVIII.

ORDINATA proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; fuerit etiam, ut conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rurſus vt B, conſequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; Ideoque concludatur A, ad C, vt D, ad F; Di-

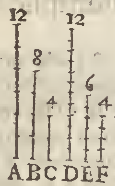
F; dicetur talis modus argumentandi ex æqualitate, ordinata proportio, quod in vtriſque magnitudinibus idem ordo in proportionibus ſeruetur. Hic autem modus demonſtratur propoſ. 22. huius lib.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt; cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs quæ ſint his multitudine pares; ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

S i, ut ex æqualitate colligatur eadem proportio extremorum, ordo in proportionibus perturbetur, ita ut dicatur, quēadmodum A, ad B, Ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B. conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinib⁹ aliud quidpiā ad E, antecedentē magnitudinē; nuncupabitur huiuſcemodi mod⁹ argumentandi ex æqualitate, Perturbata proportio, ꝙ nō ſeruetur idē ordo in proportionib⁹ magnitudinum. Conſecutionem uero hanc ualidam eſſe, oſtendetur propoſ. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quā ordinata, ſemper infert ex æqualitate eandē extremorum proportionem, etiam ſi plures magnitudines ponantur, quam tres, ceu propoſ. 22. & 23. huius lib. perſpicuum fiet.



V T V N T V R Euclidis interpretes hoc in libro, & in alijs, ubi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate

 quodam,

quodam, quod ut hic ſubyceremus, non inutile fore iudicaui- mus. Illud autem eiuſmodi eſt.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magni tudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem ha bebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis ma gnitudinem propoſitam.



VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo propoſit. C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad pro- poſitam C. Non enim ex hoc abſurdum ali quod conſequitur, quamuis ignoremus interdum, quænam ſit quarta illa magnitudo, quam ſane eſſe poſſe, dubitandũ non eſt.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI ſint quotcunq; magnitudines quot- cunque magnitudinum æqualium numero ſingulæ ſingularum æque multiplices; quã multiplex eſt unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex A B, ipſius E, uel C D, ipſius F. Cum enim A B, C D, ſint æque multiplices ipſarum E, & F; ſi A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipſi E, æquales, & C D, quoque in magnitu- dines C I, I K, K D, ipſi F, æquales; erũt magni-



magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot ſunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt G H, & I K, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non H B, & K D, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, uel F, in C D, continetur, toties & E, F, ſimul, in A B, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt A B, ipſius E, tam ſunt multiplices A B, CD, ſimul, ipſarũ E, & F, ſimul. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum. 2. pron.

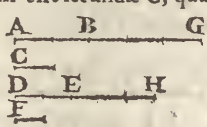
SCHOLION.

Hoc idem demonſtrabitur vniuerſe in omni genere proportionis, propos. 12.

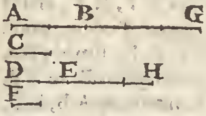
THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cũ quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

Sit magnitudo prima A B, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex D E, tertia, quartæ F; Rurſus tam ſit multiplex B G, quinta ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt E H, ſexta ipſius F, quartæ. Dico A B, primam cũ BG, quinta compoſitam, tam multiplicem eſſe ſecundæ C, quã multiplex eſt D E, tertia compoſita cum ſexta E H, ipſius F, quartę. Cum enim A B, D E, ſint æque multiplices ipſarum C, F; erunt in AB, tot magnitudines ipſi C, æqua



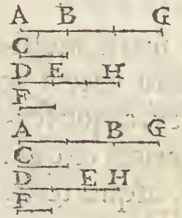
les, quot ſunt in D E, æquales ipſi F. Eadem ratione erũt & in B G, tot æquales ipſi C, quot ſunt in E H, æquales ipſi



F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; erunt
2. pron. totę multitudines A G, D H, æquales. Quare toties cōprehēditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex eſt AB, (prima compoſita cum quinta) ipſius C, ſecundæ quam multiplex eſt D H, (tertia compoſita cum ſexta) ipſius F, quartæ. Si prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

QVOD ſi prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint ſecundæ, & quartæ: Quinta vero & ſexta, æquemultiplices ſecundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint ſecundæ, & quartæ; At quinta & ſexta, æquales ſecundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima, & quinta) tam multiplex ſecundæ C, quam multiplex eſt tota DH, (tertia ac ſexta) ipſius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipſi C, oſtendetur æqualis eſſe ipſi D H, multitudini magnitudinum ipſi F, æqualium, ceu perſpicuum eſt in propoſito ſchemate. Si uero tam prima & tertia, quam quinta, & ſexta æquales ponantur ſecundæ, & quartæ, luce clarius exiſtit, primam & quintam ſimul; atque tertiam & ſextam ſimul, æquemultiplices eſſe, nimirum duplices, ſecundæ & quartæ magnitudinum.



HOC quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis uniuerſe propos. 24.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

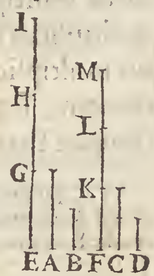
SI ſit prima ſecundæ æquemultiplex,

atque

atque tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

Sit prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E, & F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo, tam multiplicem eſſe E, ipſius B, quam eſt F, ipſius D; Nã cum E, & F, ſint æque multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam uero E G, F K, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æque multiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt G H, K L; Itẽ H I, L M, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt K L, ſexta eiuſdem quartæ D; Erit & E H, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta, quartę D. Rurſus cum ſit E H, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt F L, tertia quartæ D; ſit autem & H I, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt L M, ſexta multiplex quartæ D; Erit & E I, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt F M, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c.

2. quinti.



Quod oſtendendum erat.

SCHO-

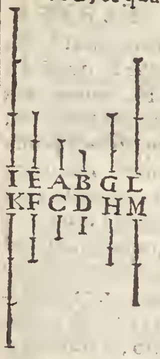
SCHOLION.

Oſtendetur hoc theorema, propos. 22. non ſolum in magnitudinibus æque multiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ binæ ſumptæ eandem habent proportionem.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quam uis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

Sit proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, ſecundæ B, & quartæ D, ęque multiplices G, & H, iuxta quã



uis multiplicationem. Dico quoque eſſe ut E, multiplicem primæ ad G, multiplicẽ ſecundæ, ita F, multiplicem tertiæ ad H, multiplicem quartæ. Capiantur enim rurſus I, K, ipſarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipſarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex eſt E, prima ipſius A, ſecundę, quam F, tertia ipſius C, quartæ; ſumptæ ſunt autem & I, K, æque multiplices ipſarum E, F, pri-
3. *quinti.* mæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipſarum A, C, ſecundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipſarum B D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, ſecundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; ſumptæque ſunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ; Item L, M, æque multiplices ſecundæ & quar-

& quartæ; ſit ut ſi I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici ſecundæ, etiam K, multiplex tertiæ deficiat ab M, multiplici quartæ: & ſi I, æqualis ſit ipſi L, etiam K, ipſi M, ſit æqualis: & ſi I, excedit ipſam L, etiam K, excedat ipſam M: Idemque oſtendetur in quibuſcunque æque multiplicibus ipſarum E, & F, nec non magnitudinum G, & H. Itaque cum I, & K, ſint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, ęque multiplices ſecundæ G, & quartæ H; oſtenſumque ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex ſecundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque eſſe M, multiplici quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: Erit, ut E, prima ad G, ſecundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum. *6.defin.5.* *6.defin.5.*

COROLLARIVM.

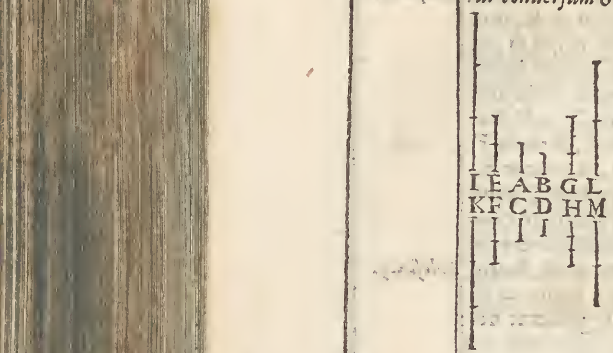
HINC manifeſtum eſt, ſi quatuor quantitates fuerint proportionales, eaſdem & contra, ſeu inverſa ratione, proportionales eſſe. Cum enim, propterea quod ſit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, oſtenſum ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit quam L, multiplex ſecundæ, uel ęqualis, uel maior, etiam K, multiplicem tertiæ minorem eſſe, uel æqualem, uel maiorem M, multiplici quartæ; Perſpicuum eſt; ſi e contrario L, maior fuerit quam I, uel æqualis, uel minor, etiam M, maiorem fore, uel æqualem, uel minorem, quam K, ſecundum quamcunque multiplicationem ſint ſumpta hæc æque multiplicia. Nam ſi utraque I, K, minor eſt quam utraque L, M; erit contra utraque L, M, maior quã I, K, &c. Quare erit ut B, prima ad A, ſecundam, ita D, tertia ad C, quartam. *6.defin.5.*

SCHOLION.

ORONTIVS *quartum hoc Theorema ſic conatur demonſtrare. Poſtquam ex 3. propos. huius lib. oſtendit I, K, eſſe æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, eſſe æque multiplices magnitudinum B, D, infert ſtatim per conuerſum 6. definitionis, iuxta ſuam expoſitionem, ita eſſe I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonſtratio admodum eſt uitioſa, tum quia ſecundum hunc ſenſum demonſtra*

tur

tur conuerſum 6. definitionis, per conuerſum eiuſdem, atque idcirco idem per idem, quod eſt abſurdum; tum etiam, quia eodem modo ſtatim a principio licuiſſet illi inferre, ſic eſſe, per conuerſum 6. definitionis E, ad G, ut F, ad H, ſine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim eſt maior ratio in illis, quam in his. Reÿcienda eſt ergo huiuſcemodi demonſtratio, una cum expoſitione 6. definitionis, ut ſupra diximus. At iuxta noſtram interpretationem eiuſdem definitionis conſtat ſolum, ſi I, minor eſt, quam L, uel æqualis, uel maior, etiam K, minorem eſſe, uel æqualem, uel maiorem, quam M; quemadmodum & idem conſtat in æque multiplicibus E, F, G, H, ſi ſumantur, pro ut inter ſe reſpondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita eſſe E, primam ad G, ſecundam, ut eſt F, tertia ad H, quartam.

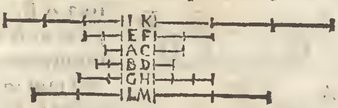


C AE T E R V M *non uidetur hoc loco diſſimulandum Theorema quoddam antiquis mathematicis ualde familiare, quamuis a nemine, quod ſciam, ſit demonſtratum. Videlicet.*

S I prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad ſecundam, & quartam magnitudines, eandem habebunt ratione͂: Necnon æque multiplices ſecundæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra eandem ratione͂ habebunt ſecunda & quarta, ad æque multiplices primæ & tertiæ; Necnon prima & tertia, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ.

S I T *A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam; ſumanturque E, & F, æque multiplices ipſarum A, & C; Item G, & H, æque multiplices ipſarum B, & D. Dico ita eſſe E, ad B, ut F, ad D; Item G, ad A, ut H, ad C; Et e conuerſo,*

uerſo, ita eſſe B, ad E, ut D, ad F; Item A, ad G, ut C, ad H. Sumantur enim rurſus ipſarum E, F, æque multiplices I, K; Item ipſarum G, H, æque multiplices L, M. Erũt igitur ex æquo, ut ante probatum eſt, 3. *quinti.*



I, K, æque multiplices ipſarum A, C; Item L, M, ipſarum B, D, æque multiplices. Quocirca ſi I, multiplex primæ A, deficit a G, multiplici ſecundæ B, etiam K, multiplex tertiæ C, 6.*defin.*5.
deficiet ab H, multiplici quartæ, &c. Igitur erit ut E, prima ad B, ſecundam, ita F, tertia ad D, quartam. Eodem modo 6.*defin.*5.
oſtendetur, ut eſt G, ad A, ita eſſe H, ad C; Atque idcirco erit conuertendo, ut B, ad E, ita D, ad F; Item ut A, ad G, ita C, ad H.

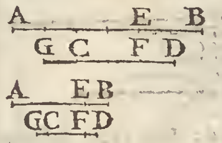
Ex quo conſtat modus argumentandi, quo frequentiſſime utuntur Geometræ, maxime Apollonius Pergæus, Archimedes, Theon, &c. Videlicet; Vt eſt A, ad B, ita eſt C, ad D; ergo ut duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius A, utpote E, ad B; ita quoque erit duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius C, quale eſt F, ad D. Item ut eſt A, ad B, Ita eſt C, ad D; igitur ut A, ad duplum uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius B, nempe ad G; ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipſius D, nimirum ad H.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

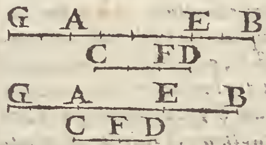
Ita multiplex ſit tota A B, totius C D, ut eſt multiplex A E, ablata ablatę C F: Dico reliquam E B, ita eſſe multipticem reliquæ C D, ut eſt tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis uidelicet

delicet ipſius G C; ut eſt A E, ipſius C F. Quoniam igitur A E, E B, æque ſunt multiplices ipſarum C F, G C; erit



1. quinti. tota A B, totius G F, ita multiplex, ut A E, ipſius C F, hoc eſt, omnes omnium, ut una unius. Sed tam multiplex ponitur A B, ipſius C D, quam eſt multiplex A E, ipſius C F; Igitur A B, tam eſt multiplex ipſius G F, quam ipſius C D; atque idcirco æquales ſunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipſius F D, quam multiplex eſt ipſius G C. Sed ita multiplex poſita fuit E B, ipſius G C, ut A E, ipſius C F, hoc eſt, ut tota A B, totius C D. Quare tam multiplex eſt reliqua E B, reliquæ F D, quam eſt tota A B, totius C D: quod eſt propoſitum.

ALITER. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, ut ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquę F D,



eſſe ſic multiplicem, ut eſt tota toti. Poſita enim G A, ita multiplici ipſius F D, ut eſt A E, ipſius C F; erit tota G E, ſic multiplex totius
1. quinti C D, ut A E, ipſius C F. Sed ita quoque multiplex eſt A B, eiuſdem C D, ut A E, ipſius C F, ex hypotheſi: Aeque multiplices ſunt igitur G E, A B, ipſius C D, atque adeo inter ſe æquales. Quare dempta communi A E, æquales erunt G A, E B; Ideoque ęque multiplices ipſius F D, cum G A, ſit multiplex poſita ipſius F D: Atqui ita eſt multiplex poſita G A, ipſius F D, ut A B, ipſius C D; Igitur & E B, reliqua ſic erit multiplex ipſius F D, reliquæ, ut A B, tota totius C D; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis ęque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

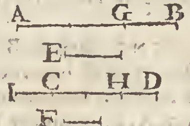
VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propos. 19. *in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, &c.*

THEOR

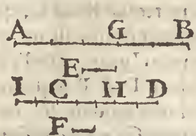
THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdē aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SINT A B, C D, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ A G, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas G B, H D, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim A B, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque A G; erit reliqua G B, uel æqualis ipſi E, uel eius multiplex, alias inęqualis, uel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum G B, æqualis ipſi E; Dico etiam H D, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim C I, æqualis ipſi F. Et quia prima A G, tam eſt multiplex ſecundæ E, quàm C H, tertia quartæ F; & quinta G B, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & C I, ſexta æqualis eſt quartę F; erit A B, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, ut H I, tertia cum ſexta, quartæ F; Atqui C D, ipſius F, erat quoque tam multiplex quā A B, ipſius E; Aeque multiplices igitur ſunt H I, C D, ipſius F; Ideoque æquales inter ſe. Quare dempta C H, communi, remanebunt C I, H D, æquales. Cum igitur C I, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque H D, eidem F, æqualis. quod eſt propoſitum. 2. quinti.



SIT ſecundo G B, multiplex ipſius E; Dico ita quoque eſſe multiplicem H D, ipſius F. Poſita namque C I, ita multiplici ipſius F, ut eſt multiplex G B, ipſius E, erit, ut prius A B, ita multiplex ipſius E, ut H I, ipſius F. Quare iterum ęquales erunt H I, C D, atque adeo reliquæ C I, H D; 2. quinti.



H D; ſed C I, eſt ita multiplex ipſius F, ut G B, ipſius E, ex hypotheſi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipſius F, quam G B, ipſius E, quod eſt propoſitum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

Hoc quoque oſtendemus uniuerſe propos. 24. in omni genere proportionis.

7.
THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

Sint duæ A, B, æquales inter ſe, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C; Item C, ad A, & B. Sumantur D, E æque multiplices ipſarũ æqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, utcunque multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales sũt, fit ut utraque uel minor ſit, quam F, uel æqualis, uel maior, iuxta quãcunque multiplicationẽ id fiat.



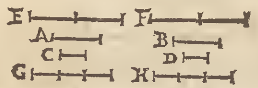
Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores ſint ipſa F, multiplici ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinũ, &c.) uel æquales, uel maiores; Erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundã,
6. defin. 5. quæ teetiæ B, ad C, quartam. Eodem pacto oſtendemus F, uel minorem eſſe utraque D, E, uel utrique æqualẽ, uel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat a D, & E, æque multiplicibus ſecundæ A, & quartę B; uel una æqualis ſit, uel maior; Erit quoque ea proportio
6. defin. 5. primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartã B; quod eſt propoſitum. Poſſet breuius ſecunda hæc pars oſtendi per

per coroll. 4. propos. ex inuerſa ratione. Cum enim oſtenſum iám ſit eſſe A, ad C, ut B, ad C, erit contra C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; Et eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Perspicuum eſt, nihil poſſe in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expoſitionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonſtrationem conſtat, utranque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; ſed ſolum, cū illæ ſint æquales, utramque eſſe uel minorem, uel æqualem, uel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propoſitionibus, quæ per 6. definitionem propoſitum colligunt.

Eodem fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æque multiplices. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ, & quartæ; Erūt tam E, & F, inter ſe æquales, quam G, & H, inter ſe, ut conſtat ex ijs, quæ in 1. lib. docuimus, cum axioma ſextum explicaremus; quod E, & F, ſint æqualium A, & B, æque multiplices, necnon G, & H, æque multiplices quoque æqualium C, & D. Quare ſi E, multiplex primæ deficit a G, multiplici ſecundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplici quartæ deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit. Eadem ergo eſt proportio A, primæ ad C, ſecundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam, ex defin. 5. Quod eſt propoſitum.



THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem ha-

bet, quam minor : Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorē.

SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. At e conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quam D, ad A B; Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, ut ſit reliqua E B; Vtraq; deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut G F, multiplex ipſius E B, maior quidem ſit, quam D; At H G, multiplex ipſius A E, non ſit minor eadem D, ſed uel maior, uel æqualis. Quoniam igi tur duæ F G, G H, æque multiplices ſunt duarū



1. *quinti.* B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, ut H G, ipſius A E, hoc eſt, ipſius C, cum æquales ſint poſitæ C, & A E : Capiatur quoque ipſius D, multiplex I K, quæ proxime maior ſit, quam H G, nempe dupla. Quod ſi dupla, maior non fuerit quam H G, ſumatur tripla, uel quadrupla, &c. Abſciſſa ergo L K, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non erit multiplex ipſius D, proxime maior quam H G; ſed & I L, maior erit quam H G) & idcirco H G, erit uel æqualis ipſi I L, uel maior. Et quia FG, maior eſt poſita quam D; LK, uero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K; Eſt autem H G, non minor, quā I L, ut demonſtratū eſt, ſed uel æqualis, uel maior : Erit igitur tota F H, maior quam I K. Itaq; cum F H, H G, ſint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; Atque I K, multiplex ipſius D, quę inſtar eſt ſecundæ & quartæ; ſit autē F H, multiplex primæ, maior quā I K, multiplex ſecundę; At H G, multiplex tertiæ non ſit maior, quā I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypotheſi (ſumpta enim eſt I K, multiplex maior quā H G) erit maior proportio

8. *defin.* 5. A B, primę ad D, ſecundam, quā C, tertiæ ad D, quartam.

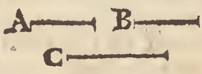
QVONIAM uero e contrario I K, multiplex primæ D, (ponitur

D, (ponitur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda, & A B, quarta) maior eſt quam H G; multiplex ſecundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quam F H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior ſit, quam I K, ut oſtenſum eſt; Erit maior proportio D, primæ 8. *defin*. 5.
ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; ſunt inter ſe æquales.

Habeant primo A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera nempe A, maior & B, mi-
nor. Erit igitur maior proportio 8. *quinti*.
A, maioris ad C, quã B, minoris ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. Habeat ſecundo C, eandem proportionem ad A, & B; Dico adhuc A, & B, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe A, eſſet
maior, & B, minor; haberet C, ad B, minorem, maiorem 8. *quinti*.
proportionem, quam ad A, maiorem: quod eſt contra hypotheſin. Non igitur maior erit A, quam B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonſtrandum erat.

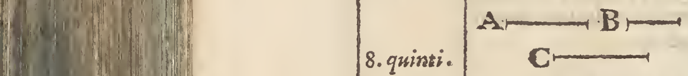


THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem

maiorem rationem habet, illa minor eſt.

Habeat primo A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem eſſe, quam B. Si
7. *quinti.* enim A, foret ipſi B, æqualis, haberent A, & B, eandem pro-



portionem ad C; Si autem A, minor eſſet, quam B, haberet B, ma-
8. *quinti.* ior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non eſt igitur A, æqualis uel minor quam C, ſed maior. Habeat ſecundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem eſſe, quam A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; alioqui haberet C, ean-
7. *quinti.* dem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hypothe-
ſin. Neque uero B, maior erit quam A; alias haberet C, ad
8. *quinti.* minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiori: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quã A; quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

Sint proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quęcunque G, H, I; & ad omnes conſequentes B, D, E, aliæ quæcunque



que æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, ut E, tertia ad F, quartam; fit,

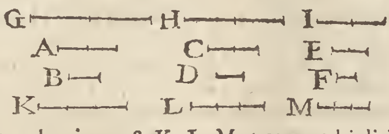
ſit, ut ſi G, multiplex primæ deficit a K, multiplici ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, uel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, uel maior: ſed (ut eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quam M, uel æqualis, uel maior, eſt quoque H, minor, quam L, uel æqualis, uel maior, propterea quod ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplici ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplici quartæ D; Et ſi G, æqualis eſt, uel maior quam K, etiam H, æqualis erit, uel maior quam L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum.

6.defin.5. *6.defin.5.* *6.defin.5.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. 12.

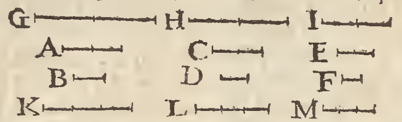
SI ſint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc eſt, ſit A, ad B, ut C, ad D; & E, ad F. Dico ut eſt una antecedentium ad unam conſequentiũ, nimirum A, ad B; ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, *1. quinti.*



ipſius A ; & omnes K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipſius B. Quoniam uero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut E, tertia ad F, quartam; ſit ut ſi G,

6.defin.5.



multiplex primæ deficit a K, multiplici ſecundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplici quartæ, & I, ab M ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, uel maior, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, uel maior. Quare ſi G, minor eſt, uel æqualis, uel maior quam *K*, erunt & omnes G, H, I, omnibus K, L, M, minores, uel æquales, uel maiores. Quocirca ut eſt A, pri-
6.defin.5. ma ad B, ſecundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quart. Si ſint itaq; magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

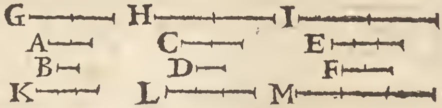
13.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIT A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam : ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B; ſecundam eſſe maiorem quam E, quintæ ad F, ſextam. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium ; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D,
6.defin.5. quartam ; ſit ut ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, mul-

L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam
L, non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando 8.defin.5.
erit, aliquando minor, qđ maior po-



natur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ
ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, exce
dit M. Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, 8.defin.5.
quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad
ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

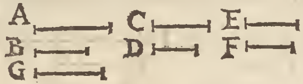
Qvod ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E,
ad F, maior quam C, ad D; fit ut ſi I, excedit ipſam M, non ne 8.defin.5.
ceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, uel ei æqua-
lis ſit. Sed ſi H, deficit ab L, uel ei æqualis eſt, etiam G, defi- 8.defin.5.
ciet a K, uel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſe cundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K; atq; idcirco maior erit
proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam A, tertiæ ad B, quar- 8.defin.5.
tam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F, quod eſt propoſitum.

Eodem modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

Qvod ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundã, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

Sit ꝑportio A, ad B, maior, quã C, ad D; & C, ad D, maior, quã E, ad F. Dico proportionem A, ad B, maiorem quoque eſſe,

quam E, ad F. Sit enim ut C, ad D, ita G, ad B, ita ut A, ad B, maiorem habeat rationem, quam G, ad B. Quo poſito, erit ratio



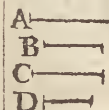
13. *quinti.* *G, ad B, maior quam E, ad F; Cum igitur ratio A, ad B, maior ſit quam G, ad B; multo maior erit ratio A, ad B, quam E, ad F.*

I AM *vero, ſi proportio A, ad B, minor fuerit, quam C, ad D; & C, ad D, minor, quam E, ad F; demonſtrabimus, per ea, quæ in hoc ſcholio oſtenſa ſunt, proportionem G, ad B, minorem eſſe quam E, ad F. Cum ergo proportio A, ad B, minor ſit quam G, ad B; erit multo minor proportio A, ad B, quam E, ad F.*

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima uero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si uero minor, & minor erit.

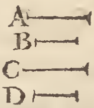
SIT A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D; Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D; Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque eſſe B, ipſa D. Sit primo A, maior quam



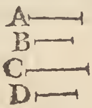
8. *quinti.* C, eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior eſt, ut oſtendimus, quam C, quintæ ad B, ſextam; Maior quoque erit

13. *quinti.* proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſex-

B, ſextam. Minor eſt ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D, quod eſt propoſitum. 10. *quinti.*



Sit ſecundo A, æqualis ipſi C, eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur pro- 7. *quinti.*
portiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, erunt quoque inter ſe 11. *quinti.*
eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; Ideoque æquales erunt B, & D, quod eſt propoſitum. 9. *quinti.*



Sit tertio A, minor quam C, eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam 8. *quinti.*
A, minoris ad B, eandem: Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam; Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam 13. *quinti.*
C, quintæ ad B, ſextam; Ideoque B, minor erit, quam D, 10. *quinti.*
quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandē habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.

Sint partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita eſſe C D, ad E F, ut A, ad B. Cum enim C D, & E F, ſint æque multiplices ipſarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidat̃ ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipſi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipſi B; eritque C G, ad E I, ut A, ad B, ex ſcholio propos 7. huius lib. quod C G, & A, æquales inter ſe ſint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, ut A, ad B; Ideoque



11. quinti. B; Ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionẽ. Quocirca ut CG, ad EI, hoc eſt, ut A, ad

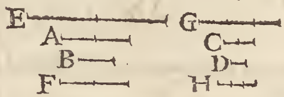


12. quinti. B, ita erit C D, ad E F, nempe omnes C G, G H, H D, ſimul, ad omnes E I, I K, KF, ſimul, quod eſt propoſitum. Partes itaque cũ pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

16.
THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & uiciſſim proportionales erũt.

Sit A, ad B, ut C, ad D. Dico uiciſſim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, æque multiplices E, F; Item ipſarum C, D,
15. quinti. æque multiplices G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F; & C, ad D, ſint



eædem proportioni A, ad
11. quinti. B; erunt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F; & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D, erunt & ipſæ eædem inter ſe, hoc eſt, ut eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare ſi E,
14. quinti. maior eſt quam G, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, maior quam H, uel æqualis, uel minor, in quacunque mul-
6. defin. 5. tiplicatione. Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, uel una æquales ſint, uel una excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uiciſſim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.

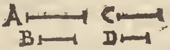
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc & illud demonſtrabitur.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam ſecunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sit enim ut A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, ſi A, prima maior eſt, quam B, ſecunda; & C, tertiam maiorē eſſe quarta D; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Erit enim permutando, ut A, ad C, ita B, ad 16. quinti.

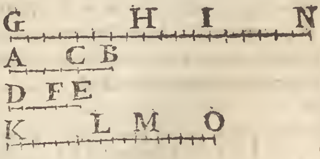


D. Quare ſi A, maior eſt, quam B, erit 14. quinti.
& C, maior, quam D; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

Sint compoſitæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, ꝓportionales, hoc eſt, AB, ad CB, ut DE, ad FE. Dico & diuiſas eaſdem proportionales eſſe, hoc eſt, ut eſt AC, ad CB, ita eſſe DF, ad FE. Ipſarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiātur eodem ordine GH, HI, KL, LM; eritque GI,



ita multiplex ipſius AB, ut eſt GH, ipſius AC, 1. quinti.

hoc eſt

hoc eſt, ut K L, ipſius D F; ſed ut eſt multiplex K L, ipſius
1. quinti. D F, ita quoque multiplex eſt K M, ipſius D E. Aeque
multiplices ergo ſunt G I, K M, ipſarum A B, D E: Capian
tur rurſus I N, M O,
æque multiplices ipſarũ



C B, F E. Quoniam igi
tur ſic eſt multiplex H I,
prima ſecundæ C B, ut
L M, tertia quartæ F E;
Itẽ tã eſt multiplex I N,
quinta ſecundæ C B, quã
M O, ſexta quartæ F E;
2. quinti. erit & H N, ſic multiplex ſecundæ C B, ut L O, multiplex
eſt quartæ F E. Itaque cum ſit A B, prima ad C B, ſecun
dam, ut D E, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſint æque
multiplices primæ ac tertiæ; Item ſecundæ & quartæ; ſit
ut ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici
ſecundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab
L O, multiplici quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ex-
cedit, excedat. Deficiat nunc G I, ab H N, & K M, ab
L O. Ablatis ergo communibus H I, L M, deficiet quoq;
G H, ab I N, & K L, ab M O. Quod ſi G I, æqualis fue
rit ipſi H N, & K M, ipſi L O, erit & G H, æqualis ipſi I N,
& K L, ipſi M O. Et ſi G I, exceſſerit ipſam H N, & K M,
ipſam L O; excedet quoque G H, ipſam I N, & K L, ipſam
M O. Quam ob rem cum G H, K L, ſumptæ ſint æque
multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O,
æque multiplices ſecundæ C B, & quartæ F E, oſtenſumq;
ſit, æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus
6. defin. 5. ſecundæ & quartæ uel una deficere, uel una æquales eſſe,
uel una excedere; Erit A C, prima ad C B, ſecundam, ut
D F, tertia ad F E, quartam. quod eſt propoſitum. Si com
poſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c.
Quod oſtendendum erat.

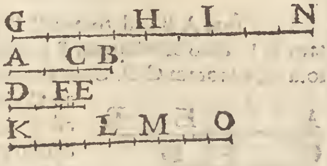
18.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuiſæ magnitudines ſint proportio
nales,

nales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

SINT diuiſæ magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc eſt, A C, ad C B, ut D F, ad F E; Dico eas etiam compoſitas proportionales eſſe, ut A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, ut prius, ipſarum A C, C B, D F, F E, æque multiplices G H, H I, K L, L M; Item ipſarum C B, F E, aliæ æque multiplices I N, M O; eruntque rurſus G I, K M, ipſarum A B, D E, æque multiplices. Item H N, L O, ipſarum C B, F E, ceu in præcedenti Theoremate oſtenſum fuit. Quoniam uero ponitur eſſe A C, prima ad C B, ſecundam, ut D F, tertia ad F E; quartam; ſumptæque ſunt æque multiplices primæ ac tertiæ; Item ſecundæ & quartæ; fit ut ſi G H, multiplex primæ deficit ab I N, multiplici ſecundæ, etiam K L, multiplex tertiæ deficiat ab M O, multiplici quartæ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Deficiat nunc G H, ab I N, & K L, ab M O: additis igitur communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Quod ſi G H, æqualis fuerit ipſi I N, & K L, ipſi M O, erit & G I, ipſi H N, æqualis, & K M, ipſi L O: Et ſi G H, exceſſerit ipſam I N, & K L, ipſam M O, excedet quoque G I, ipſam H N, & K M, ipſam L O. Quoniam ergo ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici ſecundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplici quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit; erit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam: quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.



1. quinti.
2. quinti.
6. defin. 5.
6. defin. 5.

THEOR.

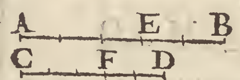
19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum; & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, ſe habebit.

SIT tota A B, ad totam C D, ut ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, eſſe ad reliquam F D, ut eſt tota A, ad totam C D. Cum enim ſit A B, ad C D, ut A E, ad C F, erit & permutando A B,

16. *quinti.* ad A E, ut C D, ad C F. Diuidendo ergo erit E B, ad A E, ut

17. *quinti.* F D, ad C F: quare permutando



16. *quinti.* do rurſus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc eſt ut tota A B, ad totam C D, cum poſita ſit A B, ad C D, ut A E, ad C F; Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur a conuerſione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim A B, ad E B, ut C D, ad F D; Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque A B, ad A E, ut C D, ad C F; Cum enim ſit

16. *quinti.* A B, ad E B, ut C D, ad F D; erit permutando A B, tota ad C D, totam ut E B, ablata ad F D, ablatam: ut igitur tota A B, ad totã C D,

19. *quinti.* ita A E, reliqua ad C F, reliquam. Permutando ergo rurſus erit

16. *quinti.* A B, ad A E, ut C D, ad C F: quod eſt propoſitum.

20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

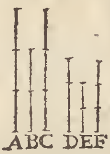
SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prima, quã tertia maior fuerit, erit & quarta, quam ſexta,

ta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitndines A, B, C, & totidem D, E, F, ſitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, ſit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem F, ſexta. Cum enim A, maior ſit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; *8. quinti.* eſt autem ut A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B; *13. quinti.* At ut C, ad B, ita F, ad E; (Cum enim ſit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo ut C, ad B, ita F, ad E,) maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E; Quare D, maior erit, *10. quinti.* quam F; quod eſt propoſitum.



SIT ſecundo A, æqualis ipſi C; Dico & D, æqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, æqualis, erit A, ad B, ut C, ad B; *7. quinti.* eſt autem ut A ad B, ita D, ad E; Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B; *11. quinti.* At ut C, ad B, ita eſt F, ad E, per inuerſam rationem, uti prius. Quare erit D, ad E, ut F, ad E; Ideoque æquales erunt D, & F; Quod eſt propoſitum. *9. quinti.*



SIT tertio A, minor quam C; Dico & D, minorem eſſe, quam F. Cum enim A, minor ſit quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; *8. quinti.* ſed ut A, ad B, ita D, ad E; Minor ergo proportio eſt D, ad E, quã C, ad B; Eſt autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E; Igitur minor eſt proportio D ad E, quam F ad E; propterea que D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. *10. quinti.* Si ſint itaque tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod erat oſtendendum.



THEOR.

21. **THEOR. 21. PROPOS. 21.**

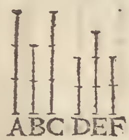
SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quã tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſi nil la minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; Sitque earum proportio perturbata, hoc eſt, ſit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem ſexta F. Cum enim



8. *quinti.* A, maior ſit quam C, erit maior proportio A, ad D, quam C, ad B; eſt autem ut A, ad B, ita E, ad F: Maior ergo proportio eſt E, ad F, quam C, ad B. Quoniam uero ut B,
4. *quinti.* ad C, ita D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad F. Quare maior erit proportio E, ad F, quam E, ad D;
10. *quinti.* Ideoque maior erit D, quam F; quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo A, ipſi C, æqualis; Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis



7. *quinti.* ipſi C, erit A, ad B, ut C, ad B; ſed ut A, ad B, ita eſt E, ad F: Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F; eſt autem, ex inuerſa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, ueluti prius. Igitur erit ut E, ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipſi
9. *quinti.* F, æqualis erit: quod eſt propoſitum.

SIT tertio A, minor, quam C; Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor quam C, erit minor
8. *quinti.* proportio A, ad B, quam C, ad B; Vt autem A, ad B, ita E, ad F: minor eſt ergo proportio E, ad F, quam C, ad B.

Quoniam

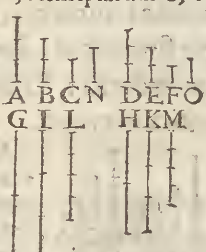
Quoniam vero, vt ante, ex inuerſa ratione vt C, ad B, Ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F; quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat. 10. *quinti.*



THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

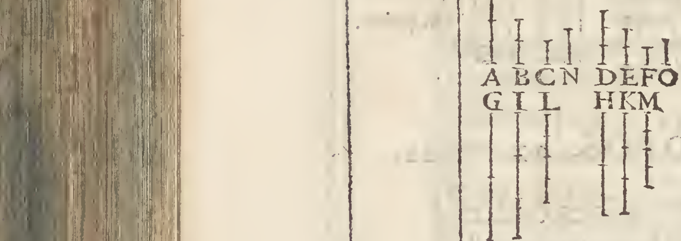
Sint quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, ſitq; A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F; Sumptis enim ipſarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipſarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipſarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam; erit quoq; G, multiplex primæ ad I, multiplicem ſecundæ, vt H, multiplex tertiæ ad K, multiplicem quartæ. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecũdam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ ad L, multiplicem ſecundæ, vt K, multiplex tertiæ ad M, multiplicem quartæ. 4. *quinti.*



Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur, ſit vt ſi G, ſuperat ipſam L, ſuperet quoque H, ipſam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaq; cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiãt vna ab L, M, æquemultiplicibus ſecũdæ C, & quartæ F, vel vna æqua- 20. *quinti.*

Z les

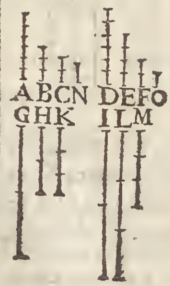
les ſint, vel vna excedãt, in quacũq; multiplicatione; Erit A,
6.defin.5. prima ad C, ſecũdã vt D, tertia ad F, quartã. qđ eſt ꝓpoſitũ.



Qvod ſi fuerint plures magnitudines tribus, ita vt ſit etiã C, ad N, vt F, ad O; Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ n. iã ſit oſtẽſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt D, ad F; ponatur aũt C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadẽ rõne ſumũtur: ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtẽſa, rurſus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodẽq; modo idẽ oſtẽdetur in quinq; magnitudinibꝰ, per quatuor; ſicut id in quatuor demõſtratũ fuit, per tres; Et ſic de pluribus. Itaq; ſi ſint quotcũq; magnitudines, &c. Quod erat oſtendẽdũ.

23. THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI ſint tres magnitudines, aliæq; ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitq; perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoq; ex æqualitate eſſe vt A, ad C, Ita D, ad F. Sumptis n. ipſarũ A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Itẽ ipſarũ C, E, F, æquemultiplicibꝰ K, L, M; Erit vt A, ad B, ita
15. quinti. G, ad H, cum G, H, ſint ipſarũ A, B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita eſt
11. quinti. E, ad F: Igitur vt G, ad H, ita eſt E, ad F;
15. quinti. Sed vt E, ad F, ita eſt quoq; L, ad M, q̃ L, M,

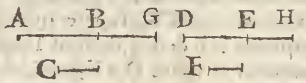
L,M,ſint ipſarũ E,F,equemultiplices. Igitur erit vt G,ad H, ita L,ad M. Rurſus quoniã eſt B,prima ad C, ſecũdã, ut D, tertia ad E,quartã;erit quoq; ut H,multiplex primæ ad K, multiplicẽ ſecundæ,ita I,multiplex tertiæ ad L,multiplicem quartæ. Quia igitur ſunt tres magnitudines G,H,K,& aliæ tres I,L,M,quæ binæ in eadẽ rõne ſumũtur,eſtq; earũ proportio perturbata; fit ut ſi G,ſuperat ipsã K, ſuperet quoq; I,ipſam M; & ſi æqualis,æqualis; & ſi deficit,deficiat Itáq; cũ G,I,æquemultiplices primæ A,& tertiæ D,a K,& M, æquemultiplicibus ſecũdæ C,& quartæ F, uel una deficiant, uel una æqualia ſint,uel una excedant; erit ut A, prima ad C,ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam. 11. quinti. 4. quinti. 21. quinti. 6. def. 5.

QUOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata,ut ſi fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut F, ad F; & C, ad N, ut D,ad E. Dico adhuc eſſe ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, ut E, ad O; Ponatur autem eſſe ita C, ad N, ut D, ad E; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quę binæ in eadem ſumuntur proportione, eſtq; perturbata earum proportio: Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, ſicut id in quatuor fuit demonſtratum, per tres; Et ſic de pluribus. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 24. PROPOS. 24. 24.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

SIT A B, prima ad C, ſecundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, ſecundam, vt E H, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe A G, compoſitam ex prima ac quinta, ad ſecundam C, vt eſt D H, compoſita ex tertia & ſexta, ad quartam F. Cum enim ſit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt



4. *quinti.* C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniã igitur eſt A B, ad C, vt D E, ad F; & C,
22. *quinti.* ad B G, vt F, ad E H; erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad
18. *quinti.* E H: componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H ad E H. Itaque cum rurſus ſit A G, ad B G, vt D H,
22. *quinti.* ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

EODEM fere modo oſtendetur in omni genere proportionis id, quod Theorema ſextum huius lib. demonſtrauit in æquemultiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionẽ, & detractæ quędam habeant ad eaſdem eandẽ proportionẽ: & reliquæ ad eaſdem eandẽ proportionẽ habebũt.

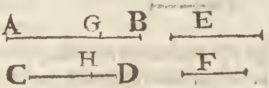
HABEANT A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc eſt, ſit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detractæ A B, D E, ad eaſdem C, F, eandem habeant proportionem, ita vt ſit quoque A B, ad C, vt D E, ad F; Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad eaſdem C, F, hoc eſt, eſſe B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim ſit vt A B,
4. *quinti.* *ad C, ita D E, ad F; erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur eſt A G, ad C, vt D H, ad F; & C, ad*
22. *quinti.* *A B, vt F, ad D E; erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E.*
17. *quinti.* *Diuidendo ergo erit vt B G, ad A B, ita E H, ad D E,*

Itaque cùm rurſus ſit B G, ad A B, vt E H, ad D E; & A B, ad C, vt D E, ad F; erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. Quod eſt propoſitum. 22. *quinti.*

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT A B, ad C D, vt E, ad F, ſitq; A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, ſimul eſſe maiores duabus C D, & E, ſimul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipſi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipſi F; Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc eſt,



vt A B, ad C D. Quare cum ſit tota A B, ad totam C D, vt ablata A G, ad ablatam C H; erit quoq; vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D. Eſt autem A B, (cum ſit omnium maxima) maior, quam C D: Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, æquales ſunt; ſi ipſis addantur æquales F, & C H; fient A G, & F, ſimul æquales ipſis E, & C H, ſimul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, ſimul maiores quam E, & C D, ſimul, cum G B, ſit maior quam H D. Quod eſt propoſitum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. 19 *quinti.*

SCHOLION.

NECESSE *eſt autem, ſi antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, conſequentem alterius eſſe omnium minimam, ceu in propoſito exemplo cernere licet. Cum enim ſit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, maior quã E; erit quoq; C D, maior quam F. Item quia maior eſt A B, quam C D, erit quoque E, maior quam F. Quod ſi e contrario* 14. *quinti.*

 antece-

antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit conſequens alterius omnium maxima, vt conſtat, ſi dicatur eſſe F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdem generis, alias non poſſet vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum diſſimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C. Sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, ſimul maiores eſſe dupla ipſius B. Sumpta enim D, ipſi B, æquali, erit, ut A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, ſimul maiores erunt, quam B, & D, ſimul, vt proxime demonſtratum eſt, hoc eſt, quã dupla ipſius B. Quod eſt propoſitum.

HIC finem Euclides imponit quinto libro; Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quaſdam propoſitiones, quibus ſæpe numero grauiſſimi ſcriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, eaſque quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri poteſt, breuitate demonſtrare, nec non in numerum, ac ſeriem propoſitionum Euclidis referre. Omnes autẽ traduntur de magnitudinib⁹ improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

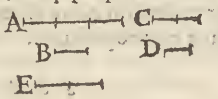
26. THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartã: habebit cõuertẽdo ſecũda ad primã minorẽ proportionẽ, quã quarta ad tertiam.

HABEAT A, ad B, maiorẽ proportionẽ, quã C, ad D. Dico proportionẽ B, ad A, minorẽ eſſe proportione D, ad C.

Intel-

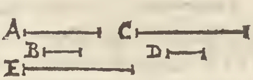
Intelligatur.n.eſſe E,ad B,vt C,ad D;eritq; proportio A,ad B,maior quoq; quã E,ad B; ac propterea A, maior erit quã E; Quare minor erit proportio B, ad A, maiorẽ quã B,ad E,minorẽ;Sed ut eſt B,ad E,ita eſt conuertendo D,ad C. Igitur proportio B, ad A,minor eſt quoque,quam D,ad C;quod eſt propoſitum.



10. quinti.
8. quinti.
4. quinti.

SCHOLION.

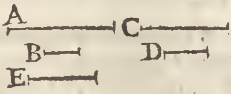
Eodem fere modo demonſtrabim⁹,ſi prima ad ſecũdã habuerit minorẽ proportionẽ,quã tertia adquartam, cõuertendo maiorẽ eſſe proportionẽ ſecũdæ ad primã,quã quartæ ad tertiã; dũmodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.



Sit enim minor proportio A, ad B, quã C,ad D. Dico conuertendo,B,ad A,maiorẽ habere proportionẽ,quã D,ad C.Intelligatur enim eſſe E,ad B,vt C,ad D;Eritq; proportio A, ad B,etiã minor,quã E,ad B;ac propterea A, minor erit, quã E. 10. quinti. *Quare maior erit proportio B,ad A,minorẽ, quã B,ad E, maiorẽ.* 8. quinti. *Sed vt B,ad E,ita eſt cõuertẽdo D, ad C.Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 27. PROPOS. 27. 27.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorẽ proportionẽ,quã tertia ad quartam:Habebit quoq; viciſſim prima ad tertiã maiorẽ proportionẽ, quã ſecunda ad quartam.

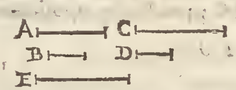


Habeat A,ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorẽ eſſe quoque proportionem A, ad C, quã B,ad D.Intelligatur nãq; eſſe E,ad B,ut C,ad D, eritq; proportio A,ad B,maior etiam quã E,ad B; Ideoq; A,maior erit quam E. 10. quinti. Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C: 8. quinti. Quoniam vero permutando, eſt vt E,

 ad C,

16. *quinti.* ad C, ita B, ad D; (cum poſita ſit E; ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D, quod eſt propoſitum.

SCHOLION.



*S*IMILITER *oſtendemus, ſi prima ad ſecundam minorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam, viciſſim primæ ad tertiã minorẽ eſſe proportionẽ, quã ſecundæ ad quartã.*

SIT *namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque eße proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; Ac propterea A, minor erit, quam E. Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. Sed permutando, vt E; ad C, ita B, ad D. (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.*

28. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem eſſe proportionem A C, ad B C, quam D F, ad E F. Intelligatur enim eſſe G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, maior quoque, quam

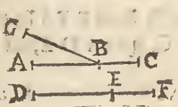


10. *quinti.* G B, ad B C; Ideoq; A B, maiori quam G B. Addita ergo communi B C,

BC, fiet A C, maior quam G C; maiorq; propterea erit pro- 8. *quinti*
portio A C, ad B C, quam G C, ad B C; Sed componendo,
ut eſt G C, ad B C, ita eſt D F, ad E F; (quod poſita ſit GB, 18. *quinti.*
ad B C, vt D E, ad E F,) Maior ergo etiam erit proportio
A C, ad B C, quam D F, ad E F, quod eſt propoſitum.

SCHOLION.

*E*ADEM *ratione oſtendemus, ſi proportio primæ ad ſecundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque eſſe proportionem primæ & ſecundæ ſimul, ad ſecũdam, quam tertiæ & quartæ ſimul, ad quartam.*



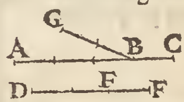
*S*IT *minor proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo minorem eſſe proportionem A C, ad B C, quã D F, ad E F. Intelligatur enim eſſe G B, ad B C, vt D E, ad EF; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque quam GB, ad B C; ideoq; A B, minor erit, quam GB. Addita ergo communi B C,* 10. *quinti.*
fiet A C, minor, quam G C; minorq; propterea erit propor- 8. *quinti.*
tio A C, ad B C, quam G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita eſt D F, ad E F. (quod poſita ſit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 29. 29.

SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cũ quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

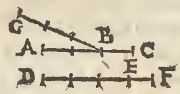
SIT maior proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem eſſe proportionẽ A B, ad B C, quam

quam D E, ad E F. Intelligatur enim eſſe G C, ad B C, ut D F, ad E F; eritq; proportio A C, ad B C, maior quoque
10. *quinti.* proportione G C, ad B C; ideoq; maior erit A C, quam G C. Ablata ergo cõmuni B C, maior erit A B, quam G B;
8. *quinti.* Ac propterea maior erit ꝓportio AB, ad B C, quam G B, ad B C; ſed diuidendo, vt eſt G B, ad B C, ita eſt D E,
17. *quinti.* ad EF; (Poſita namq; eſt G C, ad B C, ut D F, ad E F,) Igitur maior quoq; erit proportio AB, ad B C, quam D E, ad E F. quod eſt propoſitum.



SCHOLION.

QVOD ſi prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad ſecundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam: vt eodem modo poteſt oſtendi, ſi modo vocem maioris vbiq; mutes in vocem minoris, & contra, ceu in præcedentibus factum eſt.



30. ## THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI compoſita prima cum ſecunda, ad ſecũdam habuerit maiorem proportionem, quam cõpoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

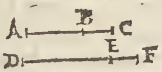
29. *quinti.* SIT maior proportio A C, ad B C, quã D F, ad E F. Dico per conuerſionẽ rationis, minorẽ eſſe proportionẽ A C, ad A B, quã D F, ad D E. Cum enim ſit A C,



A C, ad B C, maior proportio, quam D F, ad E F; erit & diuidendo maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quare conuertendo minor erit proportio BC, ad AB, quam E F, ad D E; Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad AB, quam totius D F, ad D E. Quod eſt propoſitum. 29.quinti. 26. quinti. 28. quinti.

SCHOLION.

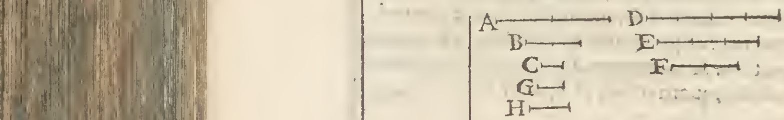
Non diſſimili ratione oſtēdemus, ſi compoſita prima cum ſecunda minorem habuerit proportionem ad ſecundam, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam, per conuerſionem rationis, maiorem eſſe proportionem primæ & ſecundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam: dummodo vbique pro voce maioris reponamus vocem minoris.



THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

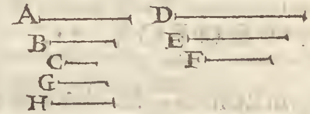
SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiã, quam primæ poſteriorum ad tertiã.

Sint tres magnitudines A, B, C, & alię tres D, E, F, ſitq; maior proportio A, ad B, quam D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque eſſe A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, ut E, ad F; eritq; propterea ꝓportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoq; B, maior quã G. Quare maior erit 10. quinti. pro-



proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem; Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quam D, ad E: Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoq; A, ma-
8. *quinti.* ior erit, quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad
22. *quinti.* eandem C; Atqui vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate D, ad F: (quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) maior ergo proportio quoq; eſt A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLION.



Eadem ratione oſtendemus, ſi fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, ſi proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem eſſe quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F, ceu in propoſita figura cernere licet.

Non diſſimiliter demonſtrabimus, ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum eſſe minorem.

Quod ſi plures fuerint magnitudines tribus, oſtendemus maiorem vel minorem quoque eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quàm primæ poſteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propoſ. 22. tradidimus.

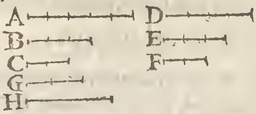
32.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſte-

poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorũ ad tertiã.

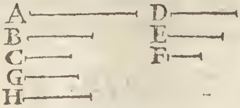
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico eſſe quoque maiorem proportionem ex æqualitate A ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt D, ad E; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C;



Ideoq; maior erit B, quam G. 10. quinti.
Quare maior erit proportio 8. quinti.
A, ad G, minorem, quam eiuſdem A, ad B, maiorem: eſt autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior eſt proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoq; maior erit A, quam H. 10. quinti.
Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionẽ, 8. quinti.
quam H, minor ad eandem C: At vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate D ad F, (Quoniam vt D, ad E, ita eſt G, ad C; & 23. quinti.
vt E, ad F, ita eſt H, ad G,) Maior ergo etiam eſt proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLION.

EADEM *ratione, ſi fuerit proportio A, ad* B, *quæ* E, *ad* F; *At* B, *ad C, maior quam D, ad* E: *Vel cõtra, ſi proportio A, ad B, maior quam* E, *ad* F; *At*



B, ad C, eadem, quæ D, ad E; *oſtendemus, ex æqualitate maiorem eſſe proportionem A, ad C, quam D, ad* F, *vt in propoſita figura perſpicitur.*

HAVD *ſecus oſtendemus, ſi proportiones priorum magnitudinum*

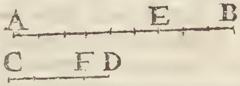
tudinũ minores fuerint,etiã extremarũ ꝓportionẽ eſſe minorẽ.

Q v o d ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtrabimus, maiorem quoque vel minorem eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ poſteriorum ad vltimã, ea arte, qua vſi ſumus propoſ. 23. &c.

33. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

S i t maior proportio totius A B, ad totam C D, qui ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem eſſe, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior ſit proportio AB, ad CD,



quam A E, ad C F, erit quo-
27. quinti. que permutando maior proportio AB, ad A E, quã CD, ad C F; ac propterea, per con-
30. quinti. uerſionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quã
27. quinti. C D, ad F D. Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc eſt, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. quod eſt propoſitum.

Q v o d ſi tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, ut ex modo demonſtrandi liquet.

34 THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorũ,

quam

quam ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoque prima; minorem autē, quam prima priorum ad primā poſteriorū.

SINT tres magnitudines A,B,C,& aliæ tres, D, E, F; Sit aūt maior proportio A,ad D,quā B,ad E;Itē maior B, ad E,quā C,ad F.Dico ꝓportionē ipſarū A,B C, ſimul,ad ipſas D,E,F,ſimul maiorē eſſe proportione C,ad F, & proportione ipſarū B, C,ſimul,ad ipſas E, F, ſimul,minorē vero proport.one A,ad D. Cū.n.maior ſit proportio A,ad D,quā B,ad E; erit permutando maior A,ad B, quā D,ad E. Igitur cōponēdo maior erit proportio ipſarū A,B,ſimul ad B,quā ipſarū,D, E, ſimul ad E: ꝑmutādo ergo rurſus,maior erit proportio A, B,ſimul ad D,E,ſimul quā B,ad E.Itaq; cū tota A,B,ad totā D,E, maiorē habeat ꝓportionē, quā ablata B, ad ablatā E;habebit quoq; reliqua A,ad reliquā D,maiorem ꝓportionē,quā tota A,B,ad totā D,E. Eadē rōne,maior erit ꝓportio B,ad E,quā totius B,C,ad totā E, F. Multo ergo maior erit ꝓportio A,ad D,quā B,C,totius ad totā E,F. Permutādo igitur,maior erit ꝓportio A,ad B,C,quā D,ad E, F; & cōponēdo ergo maior eſt ꝓportio totius A, B, C, ad B, C,quā totius D,E,F,ad E, F; Et rurſus ꝑmutādo maior ꝓportio oīum A,B,C,ſimul ad oēs D,E,F,ſimul,quā B, C, ad E,F;qđ eſt ſecūdū.Itaq; cū ſit maior ꝓportio totius A, B,C,ad totā D,E,F,quā ablatæ B,C,ad ablatā E, F; erit & maior ꝓportio reliquæ A,ad reliquā D,quā totius A,B,C, ad totā D,E,F. qđ eſt tertiū. Quoniam uero maior eſt proportio B, ad E, quam C, ad F; erit permutando maior



27. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
27. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
7. quinti.

quoque

quoque B,ad C,quam E, ad F; & componendo maior to-
28. *quinti.* tius B C,ad C,quam totius E,F, ad F; & rurſus permutan-
27. *quinti.* do maior B C,ad E,F,quam C,ad F. Eſt autem maior pro-
portio A,B,C,ad D,E,F, vt oſtendimus, quam B, C, ad E,
F. Multo ergo maior erit proportio omniũ A,B,C, ad om-
nes D,E,F quam vltimæ C,ad vltimã F; quod eſt primũ.

QVOD ſi fuerint quatuor magnitudines vtrobiq; circa
dẽ hypotheſi, hoc eſt, ſi ſit quoq; maior proportio C,ad F,
quã G ad H; eadẽ conſequentur. Vt .n. iam in tribus eſt o-
ſtenſum, maior eſt proportio
B,ad E,quã B,C,G,ad E, F,H;



Multo ergo maior erit A,ad D,
quam B,C,G,ad E, F, H. Per-
mutãdo ergo, maior erit A,ad
18. *quinti.* B,C,G,quam D,ad E, F, H; & componendo maior A,B,
C,G,ad B,C,G,quam D,E,F,H,ad E,F,H; & permutãdo
27. *quinti.* A,B,C,G,ad D,E,F,H,maior quã B,C,G,ad E,F,H, quod
eſt ſecundum. Itaq; cum ſit maior proportio totius A,B,
C,G,ad totam D,E,F,H,quam ablatæ B,C,G, ad ablatam
33. *quinti.* E,F,H; erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio,
quam totius A,B,C,G,ad totam D,E, F, H; quod eſt ter-
tium. Quoniam vero vt in tribus eſt demonſtratũ, maior
eſt proportio B C,G,ad E F, H, quam G, ad H; & maior
A,B,C,G,ad D,E,F,H,quam B,C,G, ad E, F, H, vt fuit
oſtenſum; multo maior erit proportio A,B,C,G,ad D,E,
F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod eſt primum.
Eadem arte concludes,eadem conſequi in quinque magni-
tudinibus per quatuor; & in ſex per quinq;, & in ſeptem,
per ſex, &c. quemadmodum oſtendimus in quatuor, per
tres. conſtat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLIDIS

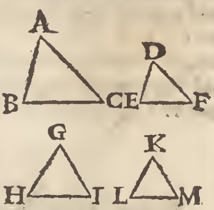
EVCLIDIS ELEMENTVM VI.

DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habẽt, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula A B C, D E F, ſimilia dicentur, ſi fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit; Itẽ latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & ut AB, ad B C, ita DE, ad E F; & ut A C, ad C B, ita D F, ad F E.



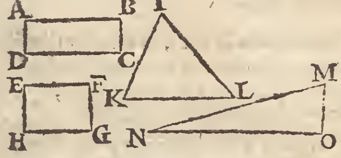
QVOD ſi anguli unius æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ ſimiles. Ex quibus conſtat, omnes figuras rectilineas æquiangulas et æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, eſſe ſimiles, quamuis inter ſe maxime ſint inæquales. Cuiuſmodi ſunt triangula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æquali-

tatem, erit G H, ad G I, ut K L, ad K M ; Item G H, ad H I, ut K L, ad L M ; & G I, & I H, ut K M, ad M L, cum ſemper ſit proportio æqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ ſunt, cum in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

Vt ſi in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera AB, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, ut utrobique ſit & antecedens, & conſequens, diuerſarum proportionum, hoc eſt, ut ſit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C; ſeu A B, ad F G, ut E F, ad B C; (utroque enim



modo A B, eſt antecedens vnius proportionis & B C, conſequens alterius, in figura A B C D; quemadmodum & primo modo E F, eſt conſequens vnius, & F G, antecedens alterius; uel ſecundo modo F G, conſequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiuſmodi parallelogramma reciproca, quamuis ſimilia non ſint. Similiter erunt triangula I K L, M N O; reciproca, ſi fuerit ut I K, ad M N, ita M O, ad I L; uel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum

cum ut tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.

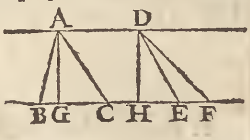
SI linea recta quæuis A B, *ita diuidatur in* C, *inæqualiter, ut ſit, quemadmodum tota* A B, *ad maius ſegmentum* AC, *ita* A C, *maius ſegmentum ad* CB, *minus ſegmentum; dicetur diuiſa eſſe ſecundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuiſionem docebit Euclides propoſ. 30. huius lib. eandemq; ſub alijs uerbis iam docuit lib. 2. propoſ. 11. ut fiet perſpicuum propoſ. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque utilitates lineæ hoc modo diuiſæ, ceu ex libris Stereometriæ conſtabit, præſertim lib. 13. ut non immmerito a quibuſdam dicta ſit diuina proportio, in quam linea eſt diuiſa.*



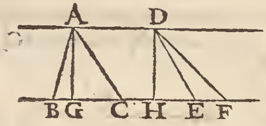
IIII.

ALTITVDO cuiuſque figuræ eſt linea perpendicularis a uertice ad baſin deducta.

SI a uertice A, *trianguli* A B C, *ad baſin* B C, *perpendicularis ducatur* A G; *dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli* A B C; *ita ut tantam dicatur habere altitudinem dictum triangulum, quanta eſt perpendicularis* A G. *Sic etiam perpendicularis* D H, *ducta a* D, *uertice trianguli* D E F, *ad baſin* E F, *ad partes* E, *protractam, appellabitur altitudo trianguli* D E F. *Vnde ſi duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad baſes, (ſiue hæ protractæ ſint, ſiue non) demiſſæ fuerint æquales, eandem dicentur huiuſmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem dictæ perpendiculares erunt æquales, cum baſes figurarum, ac vertices in eiſdem conſtituti fuerint parallelis, cuiuſmodi ſunt perpendiculares* A G, D H, *triangulorum* A B C, D E F, *in eiſdem parallelis conſtitutorum. Cum enim anguli* A G H, D H G,



interni ex eadem parte ſint duobus rectis æquales, immo duo
28.primi. *recti; erunt rectæ A G, D H, parallelæ; ſunt autem & AD, G H, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eiſdem eſſe parallelis conſtituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;*



34.primi. *ac propterea latera oppoſita AG, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicetur dicta triangula habere altitudinem. Quod ſi in eiſdem triangulis vertices ponantur C, & F, baſes vero A B, & D E; non habebunt eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad baſin D E, protractam æqualis non eſt perpendiculari ex C, ad baſin A B, deductæ, cum nec triangula ipſa in eiſdem parallelis poſſint conſtitui, vt manifeſtum eſt.*

R E C T E *vero ab Euclide altitudo figuræ cuiuſuis definita eſt per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad baſin deducitur: quoniam, ut ſcribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente ſimplicio, in libro de dimenſione, menſura cuiuſcunque rei debet eſſe ſtata, determinataque & non indefinita: Inter oẽs autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, ſicut & vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa eſt, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque. Qua de re plura ſcripſimus ad initium cõmentariorum, quos in ſphæram Ioan. de ſacro boſco edidimus.*

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

Q V O N I A M *denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem; denominator vero propotionis ſubqua-*

ſubquadruplæ uidelicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem eſſe partem quartam conſequentis, &c.) dici ſolet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem ſignificet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur in hac definitione Euclides, proportionem aliquam ex duabus, uel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ effecerint illam proportionem, ſeu (ut uertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, ſiue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla & ſecupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem ſecuplæ, hoc eſt, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producuntur eadem 12. denominator ſcilicet duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quincupla. Nam harũ denominatores 2. 3. 5. inter ſe multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, ceu in quinto libro defin. 10. expoſuimus: ita ut ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam, duplicata proportionis primæ ad ſecundam; ſi tres, triplicata, &c. Sic etiã in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam, conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod quidem primo, inductione quadam Theonis Alexandrini, quã hoc in loco adducit, confirmabimus: Deinde uero idem duabus demonſtrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Aſcalonita lib. 2. Archimedis de ſphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propoſ. 11.

altera autem a Vitellione lib. 1. propos. 13. ſuæ perſpectiuæ, comprobabimus.

THEON *igitur rem propoſitam ita conatur abſoluere. Habeat* A B, *ad* C D, *rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; &* C D, *ad* E F, *eandem quoque datam. Dico quod ipſius* A B, *ad* E F, *ratio conſtat ex* A B, *ad* C D; *& ex* C D, *ad* E F; *uel quod ipſius* A B, *ad* C D, *rationis quantitas multiplicata in ipſius* C D, *ad* E F, *rationis quantitatẽ, efficit ipſius* A B, *ad* E F, *rationis quantitatem. Sit enim primum* A B, *quam* C D, *maior; &* C D, *quam* E F: *& ſit quidem* A B, *ipſius* C D, *dupla, &* C D, *ipſius* E F, *tripla. Quoniam igitur* C D, *ipſius* E F, *tripla eſt, ipſius autem* C D, *dupla eſt* A B; *erit* A B, *ipſius* E F, *ſexcupla. Quoniam ſimplum alicuius duplicamus, fit ſexcuplum; hoc enim eſt proprie compoſitio. Vel ſic. Quoniam* A B, *dupla eſt ipſius* C D, *diuidatur* A B, *in ipſi* C D, *æqualia, hoc eſt,* A G, *&* G B: *& quoniam* C D, *ipſius* E F, *tripla eſt; æqualis autem eſt* A G, *ipſi* C D; *&* A G, *igitur ipſius* E F, *tripla eſt: Id propterea &* G B, *ipſius* E F, *tripla eſt. Tota igitur* A B, *ipſius* E F, *ſexcupla eſt. Ipſius igitur* A B, *&* E F, *ratio connectitur per* C D, *medium limitem, compoſita ex ipſius* A B, *ad* C D; *&* C D, *ad* E F, *ratione.*

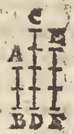


SIMILITER *autem, & ſi minor fuerit* C D, *utraque ipſarum* A B, *&* E F, *idipſum colligitur. Sit enim rurſus* A B, *ipſius* C D, *tripla; At* C D, *ipſius* E F, *ſit dimidia. Et quoniam* C D, *ipſius* E F, *dimidia eſt; Ipſius autem* C D, *tripla eſt* A B; *erit* A B, *ſeſquialtera ipſius* E F. *Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipſum ſemel, & dimidium. At quoniam* A B, *ipſius* C D, *tripla eſt; &* C D, *ipſius* E F, *dimidia: qualium* A B, *æqualium ipſi* C D, *trium, talium eſt* E F, *duorum. Quare ſeſquialterum eſt* A B, *ipſius* E F. *Igitur ratio ipſius* A B, *ad* E F, *connectitur per* C D, *medium limitem, compoſita ex ipſius* A B, *ad* C D; *&* C D, *ad* E F, *ratione.*



SED *iam rurſus ſit* C D, *utraquẽ ipſarum* A B, *&* E F, *maior*

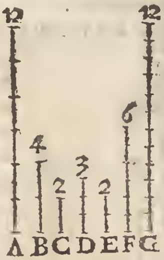
maior ; & ſit quidem A B, *ipſius* C D, *dimidium, &* C D, *ipſius* E F, *ſeſquitertium. Quoniam igitur, qualium eſt* A B; *duorum, talium eſt* C D, *quatuor; qualium autem* C D, *quatuor, talium* E F, *trium. Et qualium igitur* A B, *duorum, talium* E F, *trium. Connectitur igitur rurſus ratio ipſius* A B, *ad* E F, *per* C D, *medium limitem, quæ duorum eſt ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis caſibus. Et manifeſtum eſt, quod ſi a compoſita ratione quæuis vna compoſitarum auferatur, vno ſimplicium eiecto, reliqua compoſitarum aſſumetur.*



Hæc ad uerbum deſumpſimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

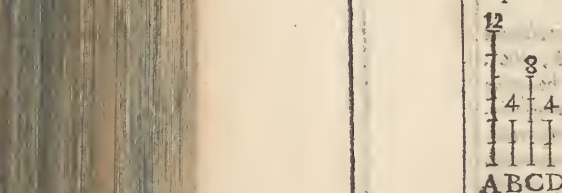
EVTOCII *uero demonſtratio ita ſe habet.*

SINT *tres magnitudines* A, B, C. *Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; &* B, *ad* C. *Quod quidem facile demonſtrabitur, aſſumpto prius hoc principio; Quantitatem, ſeu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in conſequentem magnitudinem proportionis eiuſdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad conſequentem, neceſſe eſt, conſequentem ſumptam ſecundum denominatorem, hoc eſt, multiplicatam in denominatorem, reſtituere antecedentem. Vt quia* 12. *ad* 3. *habent proportionem quadruplam, idcirco* 3. *multiplicata in* 4. *producunt* 12. *&c. Sit igitur proportionis A, ad* B, *denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator ſit E; &* D, *multiplicans* E, *producat F. Dico F, eſſe quantitatem, ſiue denominatorem proportionis A, ad C, hoc eſt, ſi multiplicetur F, in C, produci A. Cum enim D, ſit denominator proportionis A, ad B, ſi multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, ſi E, multiplicetur in C, producetur B; producatur quoque G, ex multiplicatione F, in C. Oſtendendum ergo eſt G, æqualem eſſe ipſi A; atq; adeo ex multiplicatione F, in C, produci A. Quoniam F, & E, multiplicantes C, produ-*



cunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt
18. ſeptimi dictum eſt,) erit ut F, ad E, ita G, ad B. Rurſus quia D, mul-
17. ſeptimi tiplicans E, & B, producit F, & A; erit ut E, ad B, ita F, ad A; & permutando ut E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rurſus, vt F, ad E, ita A, ad B. Vt autem F, ad E, ita oſtenſum eſt eſſe G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C; quod eſt propoſitum.

SIMILIS ratio eſt in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad



quartam, &c. Vt ſi fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam ſi intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt oſtenſum eſt: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod eſt propoſitum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.

VITELLIO denique huiuſcemodi affert demonſtrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; et B, ad C. Hoc autem demonſtrabitur, aſſumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem uidelicet proportionis multiplicatum in magnitudinem conſequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonſtrandum eſt igitur F, produci ex D, in E. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur; æquale eſt ei, quod



ei, quod ex D, ſecunda in B, tertiam gignitur, cum ſemper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, conſequentem producitur A, antecedens; ſimiliter ex D, denominatore in B, conſequentem producitur antecedens A,) erit ut F, prima ad D, ſecundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, ſit denominator proportionis B, ad C; erit quoque denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans conſequentem D, producet antecedentem F. quod eſt propoſitum. Hæc Vitellio. 19. *ſeptimi*

IDEM *oſtendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio.*

ITAQVE *cum proportio extremorum componatur ex proportionibus intermedijs, ceu demonſtratum fuit; nihil aliud colligendum erit, quando proportio aliqua ex duabus proportionibus dicetur eſſe compoſita, quam eam proportionem eandem eſſe, quæ illa, quam habet prima aliqua quantitas ad tertiam, ſi modo tres quantitates ita coordinentur, ut proportio primæ ad ſecundam ſit eadem, quæ altera componentium, & proportio ſecundæ ad tertiam eadem, quæ reliqua componentium. Vt, quando dicitur proportio 16. ad 12. compoſita eſſe ex proportionibus 8. ad 3. & 2. ad 4. nihil aliud eſt intelligendum, quam ſi ſumantur tres quilibet numeri 24. 9. 18. ſecundum proportionē 8. ad 3. & 2. ad 4. (eſt enim ut 8. ad 3. ita 24. ad 9. & ut 2. ad 4. ita 9. ad 18.) eam eſſe proportionem 16. ad 12. quam habent 24. ad 18. Vt manifeſtum erit propoſ. 23. huius lib.*

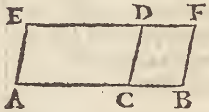
QVINQVE *autem prædictis definitionibus Euclidis addendam eſſe cenſemus ſequentem ſextam, quæ multum conducet, ut recte intelligantur 27, 28. 29. & 30. propoſitiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem eſt eiuſmodi.*

VI.

PARALLELOGRAMMVM ſecundum aliquam rectam lineam applicatū, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere uero, quando occupat maiorem lineam, quā

ſit ea, ſecundum quam applicatur.

SIT data recta linea A B, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, ſed deſit C B; & ducta B F, parallela ipſi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrãmum igitur A D, applicatum ſecundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita ut D B, appelletur defectus.



RVRSVS ſit data recta linea A C, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipſi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum ſecundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, uocetur exceſſus.

HIC autem defectus D B, uel exceſſus, in rectangulis quidem eſſe poteſt uel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem, uel Rhombus, vel Rhomboides, ut perſpicuum eſt.

1.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, ut baſes.

SINT duo triangula A B C, D E F, quorum baſes B C, E F, habentia eandem altitudinem. Item duo parallelogramma C G, E H, eiuſdem altitudinis, quorum eædem baſes B C, E F. Dico ita eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, ut eſt baſis B C, ad baſin E F. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eaſdem parallelas G H, L N. (Nam ut in defin. 4. dictum

ctum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares a uerticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt) & ex B L, ſumantque quotcunque rectæ B I, I K, K L ipſi B C, æquales; Item ex F N, abſcindantur quotcunque rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L, D M, D N. Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, 38. primi



A L K, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula D E F, D F M, D M N. Quam multiplex eſt ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex eſt recta E N, rectæ E F, tam quoque multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F; quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N: Quoniam uero ſi baſis C L, æqualis fuerit baſi E N, neceſſario triangulum A C L, æquale eſt triangulo D E N; & ſi C L, maior fuerit quam E N, neceſſario A C L, maius eſt quam D E N; 38. primi
& ſi minor, minus; deficient propterea una C L, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ ABC, ab EN, recta, & triangulo DEN, æque multiplicibus ſecundæ E F, & quartæ D E F; uel una æqualia erunt, uel una excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Quare quæ proportio eſt primæ B C, ad ſecundā EF, baſis ad baſin, ea eſt tertiæ ABC, ad quartā DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita triāgulum ad triangulum. quod eſt propoſitum. 6. defin. 5.

QVONIAM autem ut triangulum A B C, ad triangulum DEF, ita parallelogrammum C G, (quod duplū eſt trianguli A B C, per 34. propoſitionem primi.) ad parallelogrammum E H (quod eſt duplū trianguli DEF) perſpicuū eſt, ita quoq; eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, 15. quinti. 11. quinti.

mum, ut eſt baſis ad baſin. Quod tamen eodem argumen to confirmari poteſt, quo uſi ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi B G; nec nō ex punctis M, N, parallelæ, ipſi F H. Triangula igitur & pa rallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

SED & conuerſum huius demonſtrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, ut baſes, eandem habent altitudinem, æqualesue.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & paral lelogrammū A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut ba-ſis B C, ad baſin E F. Dico eorum altitudines, nimirum per-pendiculares A I, D K, eſſe æqua-les. Si enim non ſunt æquales, ſit A I, ſi fieri poteſt, maior, quā DK. Abſciſſa igitur I L, ipſi D K, æqua li, ductaque L M, ipſi B C, paral-lela, quæ latus A C, ſecet in N, con iunctaq; recta B N, erit N B C, triāgu



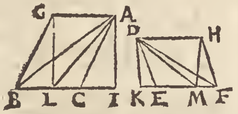
1. ſexti. *lū ad triangulum DEF, ut baſis BC, ad baſin EF; cum altitu dines L I, D K, ponantur æquales. Sed fuit etiam A B C, ad*
11. quinti *D E F, ut B C, ad E F. Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem; Ac proinde*
9 quinti. *æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt altitudines A I, D K, ſed æquales. Eadem eſt ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento oſtendemus, parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia eſſe, ſi altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.*

ADDIT hoc in loco Federicus Commandinus aliud theo-rema, quod nos breuius demonſtrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quo rum,

rum æquales ſunt baſes, uel eadem, ita ſe habent inter ſe, ut altitudines.

Sint duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia baſes æquales BC, EF. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, ut altitudo AI, eſt ad altitudinem DK.



Si enim ſumantur rectæ IL, KM, baſibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum ſint ſuper baſes æquales LI, BC, & inter eaſdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. Quare erit, ut ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM. Eſt autē, ut ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam ſi baſes ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, ut AI, ad DK. Quod eſt propoſitum. 38. primi. 7. quinti. 1. ſexti.

Qvoniam uero eſt, ut ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC, trianguli ABC, duplum, ad parallelogrammum DEFH, trianguli DEF, duplum; Erit quoque AGBC, ad DEFH, ut AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur LG, MH. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin. 15. quinti. 11. quinti.

Hoc uero conuertemus etiam, ad hunc modum.

Triangvla, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, ut altitudines, æquales habent baſes.

Sit triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammū AGBC, ad parallelogrammum DEFH, ut altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum baſes BC, EF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, ſi fieri po-



teſt

teſt, maior, quam E F. *Abſciſſa igitur* B L; *ipſi* E F, *æquali, ductaq; recta* L *A* ; *erit, ut proxime demonſtrauimus* , *A* B L, *ad* DEF, *ut A* I, *ad* D K: *Sed ut A* I, *ad* D K, *ita ponitur eße* ABC, *ad* DEF.



11. quinti. *Igitur A* B L, A B C, *ad* DEF, *eandem habent proportionem* ; *Ac proin-*
et 9. quinti. *tuinter ſe æqualia ſunt* , *pars & totdem m. Quod eſt abſurdum.* *Non ergo inæquales ſunt baſes* B C, EF, *ſed æquales* . *Eademque eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta* L *M*, *ipſi* G B, *parallela oſtendemus, parallelogramma M* G B L, A G B C, *æqualia eſſe, ſi baſes* BC, E F, *dicantur inæquales*.

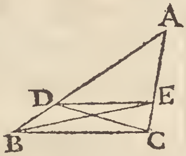
I N *omnibus autem his non uariabitur demonſtratio, etiam ſi triangula, & parallelogramma ſint rectangula, ita ut altitudines ſint ipſorum latera, uel unum fuerit rectangulum, alterum uero non . Nos aſſumpſimus caſum d:fficiliorem , quando ſcilicet neutrum eſt rectangulum . Ita enim demonſtratio maiore indiget quandoque conſtructione.*

2. THEO R. 2. PROPOS. 2.

SI ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

I N triangulo A B C, ducatur recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe ut A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, erunt triangula D E B, DEC,
37. primi ſuper eandem baſin D E, & inter eaſdem parallelas D E, BC,

B C, conſtituta, inter ſe æqualia. Quare ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C; Atqui ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita baſis A D, ad baſin D B, (cum hæc triangula ſint eiuſdem altitudinis, ut conſtat, ſi per E, agatur parallela recta ipſi A B;) & eadem ratione, ut triangulum A E D, ad triangulum DEC, ita baſis AE, ad baſin EC. Vt igitur A D, ad D B, ita A E, ad EC. (cum hæ duæ proportiones eædem ſint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, uel trianguli A E D, ad triangulum D E C.) quod eſt propoſitum. *7. quinti.* *1. ſexti.* *11. quinti.*



SECET iam recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam eſſe reliquo lateri B C. Ductis enim rurſus rectis C D, B E, erit ut baſis A D, ad baſin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum ſint eiuſdem altitudinis: Ponitur autem ut A D, ad D B, ita A E, ad E C; igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E ad E C: Sed rurſus ut baſis A E, ad baſin E C, ita triangulum A E D, ad triangulum D E C, cum ſint altitudinis eiuſdem. Igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C. Aequalia ergo ſunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea cum eandem habeant baſin D E, inter eaſdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela eſt D E ipſi B C; quod eſt propoſitum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum. *1. ſexti.* *11. quinti* *1. ſexti.* *11. quinti* *9. quinti.* *39. primi*

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

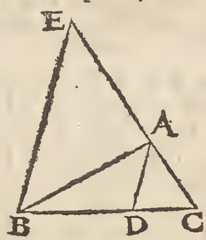
SI trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt

rationem

rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ a uertice ad ſectioné producitur, ea bifariam ſecat trianguli ipſius angulum.

IN triangulo A B C, recta A D, ſecet angulum B A C, bifariam. Dico eſſe ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipſi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter ſe æquales; Ideoque rectæ B A, E A, inter ſe æquales. Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C; Atqui ut E A, ad A C, ita B D, ad D C, cũ in triangulo B C E, recta A D, ſit parallela lateri B E; Igitur ut B A, ad A C, ita B D, ad D C, quod eſt propoſitum.

29. primi · *6. primi.* · *7. quinti* · *2. ſexti.* · *11. quinti*



SIT iam ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectã A D, bifariam ſecare angulum B A C. Agatur enim rurſus per B, recta B E, ipſi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur ut B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C; ut autem B D, ad D C, ita eſt E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, ſit lateri B E, parallela) Erit ut B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. Aequales igitur ſunt B A, & E A, inter ſe; ac propterea anguli A B E, & E, æquales erunt. Cum igitur angulus A B E, æqualis ſit alterno B A D; & angulus E, externo D A C; erunt & duo anguli B A D, D A C, inter ſe æquales, quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus bifariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

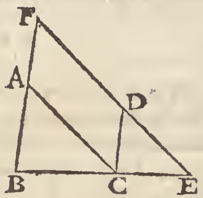
2. ſexti · *11. quinti* · *9. quinti.* · *29. primi.*

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Sint ęquiangula triangula A B C, D C E, ſintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico eſſe A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D; & A B, denique ad A C, ut D C, ad D E; Ita enim latera circa æquales angulos ſunt proportionalia, homologaque ſunt ea latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, hoc eſt, & antecedentia omnia æquales reſpiciunt angulos, & conſequentia ſimiliter. Conſtituantur latera B C, C E, ſecundum lineam rectam, ita ut angulus D C E, externus ſit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo

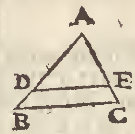


anguli A B C, A C B, minores ſunt duobus rectis; eſt autē angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniã uero angulus externus D C E, æqualis eſt interno oppoſito A B C; parallelæ erunt C D, & BF. Eadem ratione, parallelæ erunt C A, & E F, quod angulus externus A C B, ſit æqualis interno D E C. Parallelogrãmum eſt igitur A C D F; proptereaque recta A F, æqualis rectæ C D; & recta C A, rectæ D F. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela eſt lateri E F; erit A B, ad A F, hoc eſt, ad D C, (quæ æqualis eſt ipſi A F,) ut B C, ad C E. permutando igitur erit A B, ad B C, ut D C, ad C E. Rurſus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela eſt lateri B F, erit B C, ad C E, ut F D, hoc eſt, ut C A, (quę

17. primi · *11. pron.* · *28. primi* · *34. primi* · *2. ſexti.* · *16. quinti* · *2. ſexti.*

16. *quinti.* æqualis eſt ipſi F D) ad E D. permutando igitur erit B C, ad C A, ut C E, ad E D. Cum igitur ſit A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D: erit & ex æquali
22. *quinti.* A B, ad C A, ut D C, ad E D. quod eſt propoſitum. Æquiangulorũ ergo triangulorũ proportionalia ſunt latera, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.



Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo ſimile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulum A D E, toti triangulo A B C, eſſe ſimile. Aequiangula namque ſunt, cum anguli A D E,
29. *primi* A E D, æquales ſint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare
4. *ſexti.* demonſtratum eſt, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, ſimilia ſunt.

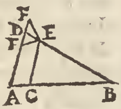
SCHOLION.

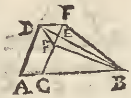
Non alienum a noſtro inſtituto eſſe putaui, ſi hic demonſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de ijs quæ uehuntur in aqua; Secundum uero in commentarijs in Apollonij Conic. Horum primum eſt.

Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum incluſæ: Recta coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ, tranſibit per extremum alterius lineæ.

Sit recta A B, *& ex punctis* A, *&* C, *educantur duæ parallelæ* A D, C E, *proportionem habentes, quam* A B, B C, *ita ut ſit* A D, *ad* C E, *ſicut* A B, *ad* B C; *uel* C E, *ad* A D,

vt B C, *ad* A B. *Dico rectam, quæ coniungit extrema* B, *&* E, *tranſire per punctum* D. *Item rectam, quæ coniungit extrema* B, *&* D, *tranſire per punctum* E. *Si enim recta* B E, *nõ tranſit per* D, *coeat cum* A D, *in* F, *puncto, quod ſit vel ſupra* D, *vel infra, ut in prima figura.*





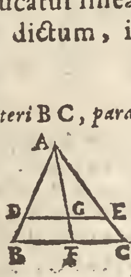
Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula B A F, B C E, *ſimilia ſunt; erit, ut* A B, *ad* A F, *ita* B C, *ad* C E; 4. ſexti.
Et permutando, ut A B, *ad* B C, *ita* A F, *ad* C E: *Vt autem* 16. quinti.
A B, *ad* B C, *ita erat quoque* A D, *ad* C E; *Igitur erit, ut* A F, 11. quinti
ad C E, *ita* A D, *ad* C E: *Ac propterea æquales erunt rectæ* 9. quinti
A F, A D, *pars & totum: Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta* B E, *per punctum* D. *Quod eſt primum.*

Rvrsvs *ſi recta* B D, *non tranſit per* E, *tranſeat per* F, *punctum, quod ſit uel ſupra* E, *uel infra, ut in ſecunda figura. Quoniam ergo, per dictum coroll. triangula* B A D, B C E,
ſimilia ſunt; erit, ut A B, *ad* A D, *ita* B C, *ad* C F; *& per-* 4. ſexti.
mutando, ut A B, *ad* B C, *ita* A D, *ad* C F: *Vt autem* A B, 16. quinti.
ad B C, *ita quoque erat* A D, *ad* C E; *Igitur erit, ut* A D, 11. quinti.
ad C F, *ita* A D, *ad* C E: *Ac proinde æquales erunt rectæ* 9. quinti.
C F, C E, *pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta* B D, *per* E. *Quod eſt ſecundum.*

Secundum uero eſt.

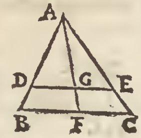
Si in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus dictum, in eaſdem rationes.

In triangulo A B C, *ducta ſit* D E, *lateri* B C, *parallela, & ex puncto* F, *quocunque ad angulum* A, *recta extendatur* F A, *ſecans* D E, *in* G. *Dico eſſe, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quoniam triangula* A F B, A G D, *ex coroll. huius propos. ſimilia ſunt; erit ut* A F, *ad* B F, *ita* A G, *ad* D G; *& permutando,* 4. ſexti.



16. quinti. *tando, ut* A F, *ad* A G, *ita* B F, *ad* D G. *Atque eodem argumento concludemus eſſe, ut* A F, *ad* AG,

11. quinti. *ita* F C, *ad* G E. *Igitur erit, ut* B F, *ad* D G, *ita* F C, *ad* G E; *& permutando, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quod eſt propoſitum.*



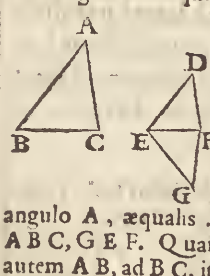
ALITER. Quoniã triangula ABF, A D G, *ſimilia ſunt, nec non triangula* A F C, A G E, *per*

4. ſexti. *coroll. huius propoſ. erit, ut* B F, *ad* F A, *ita* D G, *ad* GA: *Item ut* F A, *ad* F C, *ita* G A, *ad* G E. *Ex æquo igitur, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quod erat demonſtrandum.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur.

HABEANT triangula A B C, D E F, latera proportionalia, ſitque A B, ad B C, ut D E, ad E F; & BC, ad CA, ut E F, ad F D; & A B, denique ad A C, ut DE, ad DF. Dico triangula eſſe æquiangula, angulum ſcilicet A, æqualem eſſe angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F; ſic enim anguli æquales reſpiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, conueniantque rectæ E G, F G, in G;



32. primi eritq; reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur ſunt triangula

4. ſexti. A B C, G E F. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; Vt

11. quinti. autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. Igitur ut GE,

9. quinti. ad E F, ita D E, ad E F, eandem: proptereaque æquales

4. ſexti. erunt G E, D E. Rurſus, quoniam ut B C, ad C A, ita E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D;

F D; erit ut E F, ad F G, ita eadẽ E F, ad F D; ideoque æqua les erunt F G, F D. Itaque cum latera E G, F G, æqualia ſint lateribus D E, D F, utrumque utrique; & baſis communis E F, erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea reliqui anguli G E F, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis ſit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod eſt propoſitum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod oſtendendum erat.

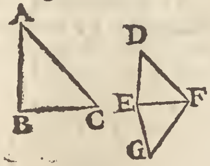
9. quinti.
8. primi
4. primi

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

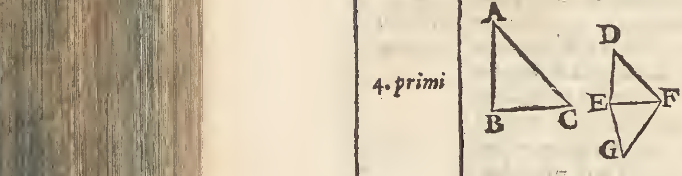
SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, ſintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc eſt, ſit A B, ad B C, ut D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulũ ſcilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim equales anguli homologa latera reſpiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, ut in præcedenti propos. dictum eſt, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; ſed ut A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F; igitur ut D E, ad E F, ita G E, ad eandem E F; ac idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E,



4. ſexti.
11. quinti.
9. quinti.

E F, æqualia ſint lateribus G E, E F, & anguli ipſis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus eſt, æqualis angulus F E G, æqualis eſt poſitus angulus D E F, proptereaq; æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F,) erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, E F D; & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F. quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonſtrandum.

4. primi



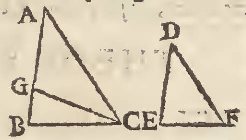
7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum uero ſimul utrunque aut minorem, aut nó minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

Sit angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc eſt, ſit ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, ſit uel minor recto, uel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet A C B, & F, circa quos ſunt latera proportionalia, nec non & angulos B, & E, æquales eſſe. Sit enim primo tam B, quam E, recto minor: Quo poſito, ſi anguli A C B, & F, non ſunt æquales, ſit A C B, maior, quam F; fiatque ipſi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D,

ponatur æqualis, erit & reliquus A G C reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare ut A C, ad C G, ita DF, ad F E; ſed ut D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B: Vt igitur A C, ad C G, ita eadem A C, ad C B; ac propterea æquales erunt C G, C B, & anguli CBG, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; cum A G C, C G B, ſint duobus rectis æquales; Eſt autem oſtenſus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto eſt angulus E; Sed poſitus eſt etiam recto minor. quod eſt abſurdum. 32. primi 4. ſexti. 11. quinti. 9. quinti. 5. primi 13. primi



Sit ſecundo tam B, angulus, quam E, recto non minor, eritque ut prius angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit, ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, ſed uel maiores, uel æquales duobus rectis, quod eſt abſurdū. Non ergo inæquales ſunt anguli A C B, & F, ſed æquales, ac idcirco reliqui etiā anguli B, & E, æquales erunt. quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat. 17. primi 32. primi

SCHOLION.

Addidit Euclides, utrumque angulorum reliquorum B, & E, debere eſſe uel minorem recto, uel non minorem. Nam alias, manente tota hypotheſi non ſequeretur, triangula eſſe æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, ſit C G, æqualis ipſi C B, habebunt duo triangula A B C, AGC, *unum angulū uni angulo æqualē, immo angulum A, cōmunem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc eſt, ut A C, ad C B, ita eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non ſunt ullo modo æquiangula triangula A B C, A G C, ut conſtat. Quod ideo euenit, quia non uterque angulorum* A B C, A G C, *minor eſt recto, uel non minor. Immo* A B C, *eſt quidem recto minor; A G C,* 7. quinti.

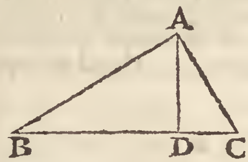
 uero

uero recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia ſint,
5. primi *& ideo anguli C B G, C G B, æquales; erit uterque eorum re-*
17. uel 32. primi. *cto minor, ac propterea A G C, recto maior.*

8. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

IN triangulo A B C, angulus B A C, ſit rectus, a quo ad baſin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, ſimilia eſſe & toti triangulo A B C, & inter ſe. Cum enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, ſint recti, & angulus B, communis, erunt & reliqui anguli
32. primi A C B, & D A B, æquales. Aequiangulum eſt igitur triangulum D B A, triangulo A B C, ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, erit ut
4. ſexti. C B, ad B A, ita B A, ad B D: & ut B A, ad A C, ita B D, ad D A; & ut B C, ad C A, ita B A, ad A D. Quare ſimile eſt triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo oſtendetur triangulum A D C, ſimile eidem triangulo A B C; Nam anguli B A C, & A D C, ſunt recti, & angulus C, communis; ac propte-
32. primi rea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare ut
4. ſexti. B C, ad C A, ita C A, ad C D; & ut C A, ad A B, ita C D, ad D A; & ut C B, ad B A, ita C A, ad A D. Non ſecus demonſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula A D B, & A D C, cũ anguli A D B, A D C, ſint recti, & anguli A B D, C A D, oſtenſi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atque idcirco ſit ut B D, ad D A, ita D A, ad D C, &c. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.



CORROL-

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, perpendicularē quæ in rectangulo triã gulo ab angulo recto in baſin demittitur, eſſe mediam proportionalem inter duo baſis ſegmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale inter totam baſin, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet.

Ostensvm eſt enim, eſſe ut B D, ad D A, ita D A, ad DC; ac propterea D A, eſſe mediam proportionalem inter B D, & D C: Item eſſe ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & idcirco B A, mediam eſſe proportionalem inter C B, & B D: Denique eſſe ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, eſſe proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. 11.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

Imperetvr, ut ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, utcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abſcindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda eſt ex A B, ut in propoſito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, eſſe partem tertiam imperatam.

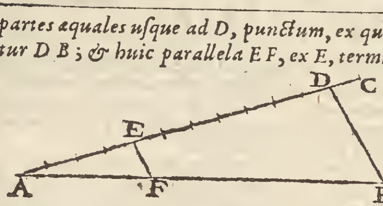


Nam cum in triangulo A B F, lateri F B, parallela ſit recta D G; erit ut F D, ad D A, ita B G, ad G A; componendo igitur, ut F A, ad D A, ita B A, ad G A: ſed F A, ipſius A D, eſt tripla ex conſtructione; Igitur & B A ipſius A G, erit tripla, ideoque A G, erit tertia pars ipſius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat. *2. ſexti.* *18. quinti.*

SCHOLION.

Qvod ſi ex A B; auferenda ſit pars, quæ contineat quatuor undecimas ipſius A B, ſumendæ erunt ex A C, undecim partes

partes æquales uſque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partiũ.

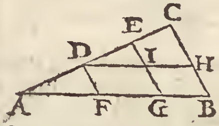


Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rurſus ut D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & conuertendo ut A E, ad A D, ita A F, ad A B: 4. quinti. *Eſt autem A E, pars continens quatuor undecimas ipſius A D, ex conſtructione; Igitur & A F, eadẽ pars erit rectæ A B. Quod eſt propoſitum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipſius aliquotas.*

12. PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, ut data altera recta ſecta fuerit.

SIT recta A B, ſecanda ſimiliter, ut ſecta eſt recta A C, in D, & E, hoc eſt, in partes, quæ ſint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipſi B C. Dico rectam A B, ſimiliter eſſe ſectam in F, & G, ut eſt ſecta A C, in D, & E. Nam ut A D,

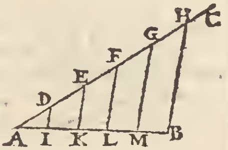


2. ſexti. ad D E, ita A F, ad F G; Proportionales ergo ſunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod ſi ducatur D H, ipſi
2. ſexti. F B, parallela, ſecans E G, in I, erit rurſus ut D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc eſt, ita F G, ad G B; quod F G, ipſi D I,
34. primi & G B, ipſi I H, æqualis ſit. Quare proportionales quoque erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Itaque datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecuimus, ut data altera recta ſecta fuit. Quod faciendum erat.

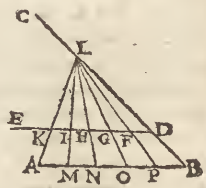
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc problemate colligi poteſt facilis admodum uia, ac ratio diuidendi lineam rectã datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus. Sit enim data recta A B, *diuidenda in quinque partes æquales. Ducta recta* A C, *faciente cum* A B, *quemcunque angulũ* C A B, *ſumantur ex ea quinque partes æquales* A D, D E, E F, F G, G H. *Quia igitur linea recta* A H, *utcunque eſt diuiſa, ſi ex* H, *ad* B, *ducatur recta* H B, *& huic ex punctis* D, E, F, G, *parallelæ agantur* D I, E K, F L, G M; *erit* A B, *ſimiliter diuiſa, ut* A H, *ceu conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cum igitur* A H, *ſit diuiſa in quinque partes æquales, erit &* A B, *in totidem æquales partes diuiſa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta* A B.



Hvic rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi poſſunt aliæ non iniucundæ, ceu propos. 10. lib. 1. ſumus polliciti. Sit enim rurſus data linea recta A B, *diuidenda in quinque partes æquales. Ducatur ex* B, *recta* B C, *utcunque faciens angulum cum* A B; *Deinde ex aſſumpto puncto* D, *agatur* D E, *parallela ipſi* A B, *ex qua abſcindantur quinque æquales partes* D F, F G, G H, H I, I K, *ea lege tamen, ut* D K, *minor ſit quam* A B. *Poſtremo ex* A, *per* K, *recta ducatur* A L, *occurrens ipſi* B C, *in* L, *puncto, a quo per puncta* F, G, H, I, *rectæ ducantur* L P, L O, L N, L M, *quas dico diuidere rectã* A B, *in quinque partes æquales. Cum enim* D E, *ſit parallela ipſi* A B, *erit angulus* L I K, *angulo* L M A, *& angulus* L K I, *angulo* L A M, *æqualis: eſt autem angulus* A L M, *communis; Aequiangula igitur ſunt triangula* L K I, L A M, *ac propterea ut* L I, *ad* I K, *ita* L M, *ad* M A; *Item eadem ratione, ut* L I, *ad* I H, *ita* L M, *ad* M N: *ſed ut* L I, *ad* 29. primi 4. ſexti.



7. quinti. *ad* I K, *ita* L I, *ad* I H, *quod æquales ſumptæ ſint* I K, I H; *igi-*
11. quinti. *tur ut* L M, *ad* M A, *ita eadem* L M, *ad* M N; *ideoque æqua-*
9. quinti. *les erunt* A M, M N. *Non aliter oſtendes* M N, *æqualē eſſe ipſi* N O; *&* N O, *ipſi* O P, *&* O P, *ipſi* P B. *Diuiſa eſt ergo* A B, *in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.*

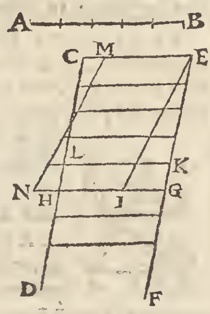
ALITER. *Ab extremis punctis* A, *&* B, *educantur duæ rectæ* B C, A D, *inter ſe parallelæ; Et ex* B C, *abſcindantur quatuor partes æquales* B E, E F, F G, G H, *ut ſint tot partes una minus, in quot eſt linea diuidenda; Hic autem ex* A D, *totidem æquales reſecentur* A I, I K, K L, L M. *Ductis igitur rectis* E M, F L, G K, H I, *ſecantibus rectam* A B, *in* N, O, P, Q;



dico ipſam A B, *ſectam eſſe in quinque partes æquales. Cum*
33. primi *enim æquales ſint, & parallelæ* G H, I K, *erunt &* H I, G K, *parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt* G K, F L, E M. *Quare cum* A M, *ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit &* A Q, *ſimiliter in quatuor partes æquales diuiſa, ut conſtat ex demonſtratione huius 10. propos. Eadem ratione diuiſa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quod* B H, *in totidem eſt partes æquales diuiſa. Quare cum tam* A N, *quam* B Q, *æqualis ſit ſingulis partibus* N O, O P, P Q; *erũt omnes quinque partes* A N, N O, O P, P Q, Q B, *inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. *Præparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum. Ductis duabus rectis inter ſe parallelis utcunque* C D, E F; *ex utraque abſcindantur partes inter ſe æquales quotcunque, ſaltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correſpondentia lineis rectis iungantur. Deinde officio circini capiatur longitudo rectæ* A B, *diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ* C E, *ut ex* E, *transferatur in inſtrumentum ad punctum* I, *illius lineæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta* G H; *ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremo ex* E, *ad* I, *recta ducatur* E I, *quã dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cum enim* G K,
33. primi H L, *æquales ſint, & parallelæ, erunt quoque* G H, K L, *parallelæ; Eodemque modo omnes lineæ inter rectas* C D, E F, *inter*

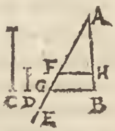
inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, ut ex demonſtratione huius 10. propoſ. liquet, quèmadmodum E G, diuiſa eſt in quinque partes æquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit E I. Si igitur officio circini ſingulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propoſitam A B, ipſi E I, æqualem, diuiſa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.



ALIQVANDO *autem neceſſe eſt lineas parallelas extra inſtrumentum producere. Vt ſi eadē linea transferatur ab M, uſque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque M N, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat, ſi ducatur ex M, ipſi E G, parallela, uſque ad rectam G H. Quod ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c.*

EODEM *modo, ad ſimilitudinem huis propoſitionis, licebit nobis facili negotio datam lineam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. Id enim non raro a Geometris exigitur.*

SIT *ſecanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam rectæ C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta A F, ipſi C, & F G, ipſi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, ſectam eſſe in H, ſecundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, cum ſit, ut A F, ad F G, atque adeo, ut C, ad D, ita A H, ad H B.* *2. ſexti.*



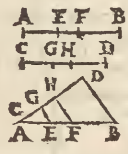
POSTREMO *inſeremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ uehuntur in aqua. Nimirum.*

SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſe-

ctiones

ctiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.

S E C E N T V R rectæ A B, C D, *proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita ut ſit* A E, *ad E B, ſicut C G, ad* G D; *Item* A F, *ad F B, ut C H, ad H D. Dico ſectiones intermedias E F, G H, proportionales quoque eſſe cum duobus ſegmentis A E, C G; uel cum duobus F B, H D; hoc eſt, eſſe* A E, *ad E F, ut C G, ad G H. Item F B, ad E F, ut H D, ad G H. Cum enim ſit, ut A E, ad E B, ita C G, ad G D; Erit componendo, ut* A B, *ad E B, ita C D, ad G D. Item cum ſit, ut* A F, *ad F B, ita C H, ad H D; Erit componendo, ut* A B, *ad F B, ita C* D, *ad H D; & conuertendo, ut F B, ad* A B, *ita H D, ad C D. Itaque cum ſit, ut F B, ad* A B, *ita H D, ad C D; Et ut* A B, *ad E B, ita C D,*



22. quinti. *ad G D; Erit ex æquo, ut F B, ad E B, ita H D, ad G D; Et conuertendo, ut E B, ad F B, ita G D, ad H D; Et per conuerſionem rationis, ut E B, ad E F, ita G D, ad G H; Et diuidendo, ut F B, ad E F, ita H D, ad G H. Quod eſt ſecundum.*

R V R S V S, quia eſt, ut A E, ad E B, ita C G, ad G D; Et ut E B, ad E F, ita G D, ad G H; Erit ex æquo, ut A *E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod eſt primum.*

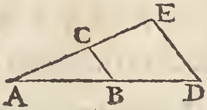
B R E V I V S tota propoſitio demonſtrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, *in unum, ut fiat angulus B C D, uel BAD; iunganturque rectæ D B, H F, G E. Quia igitur eſt,*
2. ſexti. *ut A E, ad E B, ita C G, ad G D; Parallela erit G E, ipſi* D B. *Rurſus, cum ſit, ut A F, ad F B, ita C H, ad H D; Pa-*
30. primi *rallela erit eadem ratione H F, ipſi* D *B. Quare & G E, H F,*
2. ſexti. *inter ſe parallelæ ſunt:* Ac *propterea erit, ut* A *E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod eſt propoſitum.*

10. PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, AC, ita diſpoſitæ, ut efficiant angulum

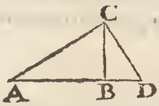
angulum A, quemcumque, ſitque inuenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam uolumus eſſe antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipſi A C. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipſi A C, productæ in E. Dico C E, eſſe tertiam proportionalē, hoc eſt, eſſe ut A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cum enim in triā-



gulo A D E, lateri D E, parallela ſit recta B C; erit ut A B, ad B D, ita A C, ad C E; Sed ut A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipſi B D: Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum. 2. ſexti. 7. quinti.

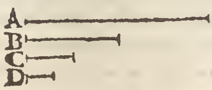
SCHOLION.

*A*LITER *idem demonſtrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ* A B, B C, *conſtituantur ad angulum rectum* A B C; *& coniungatur recta* A C. *Producta autem* A B, *antecedente, ducatur ex* C, *ad* A C, *perpendicularis* C D, *occurrens ipſi* A B, *productæ in* D. Dico B D, *eſſe tertiam proportionalem. Cum enim in triā-*



gulo ACD, *angulus* A C D, *ſit rectus, & ab eo ad baſin* AD, *deducta perpendicularis* C B; *erit per coroll. 8. propos. huius lib.* B C, *media proportionalis inter* A B, *&* B D, *hoc eſt, ut* A B, *ad* B C, *ita erit* B C, *ad* B D. *Quod eſt propoſitum.*

*I*NVENTA *autem tertia linea continue proportionali, ſi primam omiſeris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt ſi lineis* A, *&* B, *adinueniatur tertia proportionalis* C; *& duabus* B, *&* C, *tertia*



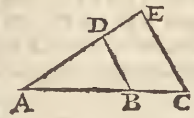
proportionalis D, *erunt quatuor lineæ* A, B, C, D, *continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,*

tionalis, ſexta, ſeptima, octaua, &c.

10. PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Diſponantur primæ duæ A B, B C, ſecundum lineam rectã, quæ ſit A C: Tertia uero A D, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, eſſe quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta ſit perpendicularis B D, erit ut A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta eſt proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



2. *ſexti.*

SCHOLION.

HINC *facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri poſſint. Si enim datæ ſint duæ rectæ lineæ* A, B, *in quacunque proportione, ſi tertia quælibet accipiatur* C, *& ei quarta proportionalis inueniatur* D, *ut ſit quemadmodum* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D; *factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur ſex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ ſemper eandem habeant proportionem.*

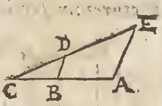


OSTENDEMVS *etiam cum Pappo ſequens problema. Videlicet.*

TRIBVS datis rectis lineis, quartã inuenire, quæ ſit ad tertiam, ut prima ad ſecundam.

SINT

Sint tres rectæ A B, B C, C D; oporteatque inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam ſit, ut A B, prima ad B C, ſecundam. Diſponantur primæ duæ A B, B C, in directum, ut faciant rectam A C: Tertia uero C D, cum ſecunda B C, faciat angulum C, quemcunque.

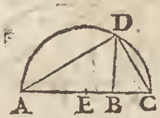


Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ, in E. Dico E D, eſſe quartam, hoc eſt, eſſe E D, ad D C, tertiam, ut eſt A B, prima ad B C, ſecundam. Hoc autem manifeſtum eſt, cum A C, E C, proportionaliter ſecentur in B, & D. 2. ſexti.

PROBL. 5. PROPOS. 13. 9.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

Sint duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineam rectam A C. Diuiſa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, uel E C, ſemicirculus deſcribatur A D C; Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam uſque. Dico B D, eſſe mediam proportionalẽ. Ductis enim rectis A D, C D, erit angulus A D C, rectus in ſemicirculo exiſtens. 31. tertij. Cum igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta ſit ad baſin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium 8. propos. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediã proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



SCHOLION.

Perspicuum hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam uſque, mediam eſſe proportionalem,

inter duo diametri ſegmenta, quæ a perpendiculari facta ſunt. Deturenim ſemicirculus A B C, & ex puncto D, diametri

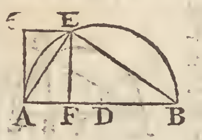


A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipſi A C. Dico DB, eſſe proportionalem mediam inter A D, & D C, id quod liquido conſtat ex demõſtratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ A B, C B, fiet angulus
31. tertij. *A B C, rectus; Quare per coroll. propos. 8. conſtat propoſitũ. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, &c.*

EX PELETARIO.

Data recta linea, aliam rectam, (quæ minor non ſit, quam dupla illius) ita ſecare, ut data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius.

Sit data recta A C, & diuidenda proponatur recta A B, (quæ minor non ſit quam dupla ipſius A C, ſed uel dupla, uel maior) ita ut inter huius ſegmenta, media proportionalis ſit A C. Diſponantur rectæ AB,



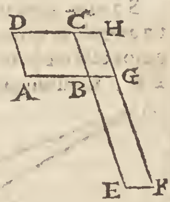
A C, ad angulum rectum B A C, & diuiſa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, uel D B, ſemicirculus deſcribatur A E B. Deinde per C, ducatur ipſi A B, parallela C E, ſecans circumferentiam in E, puncto, a quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta A F. F B. Ductis enim rectis A E, B E, erit ut iam eſt demonſtratum, ex coroll. 8. propos. huius lib. E F,
34. primi media proportionalis inter A F, & F B. Cum igitur E F, æqualis
28. primi ſit ipſi A C, eo quod parallelogrammum ſit A C E F; (Eſt enim C E, ipſi A F, parallela per conſtructionem, & A C, ipſi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A;) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod eſt propoſitum.

13. THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem

lem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos A B C, E B G, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut A B, & B G, unam efficiant lineã rectam. Quo facto, cum anguli ABC, E B G, ſint æquales, erunt & E B, BC, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur iam D C, & F G, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma D B, B F, erit ut D B, ad BH, ita B F, ad idem B H. Sed ut D B, ad B H, ita eſt A B, baſis ad baſin B H, quod parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter ut B F, ad B H, ita eſt baſis E B, ad baſin B C: Igitur ut A B, ad B G, ita eſt E B, ad B C, quod eſt propoſitum.



7. quinti.
1. ſexti.

E CONTRARIO, ſint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, reciproca, hoc eſt, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione, cum ſit, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C; Vt autem A B, ad B G, ita D B, ad B H; & ut E B, ad B C, ita B F, ad idem B H: erit quoque ut D B, ad B H, ita B F, ad idem B H; Ac idcirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

1. ſexti.
9. quinti.

14. THEOR. 10. PROPOS. 15.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

Sint duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur triangula ad angulos æquales, ita ut



A B, B E, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, ſint æquales; erit & D B, B C, una recta linea, ceu demonſtratum eſt, ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia ſunt triangula

7. *quinti.* A B C, D B E, erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idē

B C E; ſed ut triangulum A B C, ad triangulum B C E,

1. *ſexti.* ita eſt baſis A B, ad baſin B E, quod hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter ut D B E, ad B C E, ita baſis D B, ad B C; Quare ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Quod eſt propoſitum.

Iam uero contra, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cum ſit ut A B, ad B E, ita D B, ad B C;

1. *ſexti* ut autem A B, ad B E, ita triangulum A B C, ad triangula B C E; & ut D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit ut A B C, ad B C E, ita D B E,

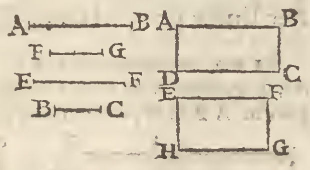
9. *quinti.* ad idem B C E; proptereaq; æqualia erunt triangula A B C, D B E.

DBE. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C, ut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis A B, B C; rectangulum uero E F G H, comprehenſum ſub medijs E F, F G. Dico rectangula A C, E G, eſſe æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit ut A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogrãma A C, E G, æqualia erunt. Quod eſt propoſitum. 14. ſexti.



CONTRA uero, ſint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe ut A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia ſint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & C; erunt latera circa hoſce angulos reciproca, ſicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales 14. ſexti.

fuerint,

fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.



IDEM uerum eſt, etiam ſi parallelogramma A C, F G, non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita ut anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Veluti manifeſtum eſt in hcc figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

16. THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod a media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod a media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C, ſitque rectangulum A B C D, contentum ſub extremis A B, B C; & ſit quadratum mediæ E F, ſit E F G H. Dico æqualia eſſe rectangulum A C, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis ſit ipſi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritque quadratum E G, comprehenſum ſub medijs E F, F G, propter æqualitatem rectarū E F, F G; Quare rectangulum A C, comprehenſum ſub extre-

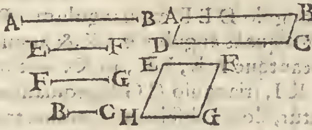


extremis A B, B C, æquale eſt quadrato E G, hoc eſt, re- 16. ſexti.
ctangulo ſub medijs E F, E G, comprehenſo: Quod eſt
propoſitum.

Sed ſint iam æqualia rectangulum A C, & quadratũ
E G. Dico eſſe ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cum enim
æqualia ſint rectangula A C, & E G, erit ut A B, ad E F, ita 15. ſexti.
F G, ad B C. Vt autem F G, ad B C, ita eſt E F, ipſi F G, 7. quinti.
æqualis, ad eandem B C. Quare ut A B, ad E F, ita eſt E F,
ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c.
Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Eadem omnino conſequuntur, etiamſi parallelogrammi non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita ut E G, ſit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim diſſimilis erit in his demonſtratio, ut figura indicat.



COROLLARIVM.

Ex poſteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalẽ inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, oſtenſum fuit, eſſe ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Quare E F, media eſt proportionalis inter A B, & B C.

PROBL. 6. PROPOS. 18. 19.

A DATA recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta A B, ſuper quam deſcribendum ſit re-

ctilineum rectilineo C D E F G, ſimile ſimiliterq; poſitum, Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineum reſoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantque rectæ A I, B I; in puncto I; eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis, totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rurſus
32. primi



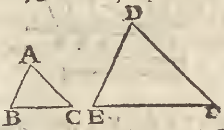
angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H; conueniantque B H, I H, in puncto H; eritque eadem ratione triangulũ B H I, triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K; coeantque A K, I K, in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec abſoluantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, ſimile eſſe, ſimiliterque poſitum. Cũ enim angulus I A B, conſtitutus ſit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis; Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut conſtat ex conſtructione. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam uero ita eſt A B, ad B I, ut C D, ad D F; & ita B I, ad B H, ut D F, ad D E; erit ex æquo ita A B, ad B H, ut C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia ſunt. Sunt autem & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia, ob triangula æquiangula B H I, D E F. Rurſus ita eſt H I, ad I B, ut E F, ad F D; & ita I B, ad I A, ut F D, ad F C; & ita I A, ad I K, ut F C, ad F G; Quare ex æquo erit ita H I, ad I K, ut E F, ad F G; & ideo latera quoque circa angulos H I K, E F G, proportionalia, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum ſint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterque deſcripta. A data ergo

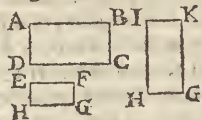
4. *ſexti.*
22. *ſexti.*
4. *ſexti.*
4. *ſexti.*
22. *ſexti.*

ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcripſimus; Quod faciendum erat.

SCHOLION.

DICVNTVR *autem rectilinea ſuper lineas rectas deſcripta, eſſe ſimilia & ſimiliter poſita, quando anguli æquales conſtituuntur ſuper ipſas rectas lineas, & reliqui æquales ſemper ordine ſeſe conſequuntur, nec non, & latera proportionalia. Vt triangula A B C, DEF, non ſolum erunt ſimilia, ſed etiã ſuper rectas B C, E F, ſimiliter deſcripta, ſi anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita ſit A B, ad B C, ut D E, ad E F, &c. At ſuper rectas B C, DE, non dicentur ſimiliter eſſe deſcripta, cum anguli B, C, non ſint æquales angulis D, E. Similiter rectangula A C, E G, ſimilia, dicentur ſimiliter eſſe deſcripta ſup rectas D C, H G, quoniam ut A D, ad D C, ita eſt E H, ad H G, &c. At verò rectangula A C, I G, non dicentur ſimiliter deſcripta ſuper rectas D C, H G, quamuis ſint ſimilia, ut manifeſtum eſt. Eadem tamen ſimiliter erunt deſcripta ſuper rectas D C, I H, uel ſuper rectas A D, H G.*



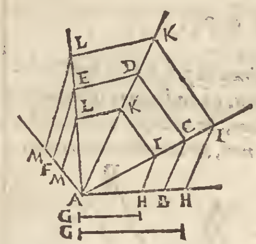


Omnes autem figuræ ſecundum conſtructionem huius problematis deſcriptæ, ſunt neceſſario ſimiliter poſitæ, ut patet in rectilineis A B H I K, C D E F G, ſuper lineas A B, & C D, deſcriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, ſunt quoque poſitæ ſimiliter.

FORTASSIS *autem expeditius Problema propoſitum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, ſuper datam rectam G, deſcribendum ſimile rectilineum, ſimiliterque poſitum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abſcindatur A H, æqualis datæ rectæ G, uel certe ex ipſa A B, ulterius producta, ſi uidelicet G, fuerit maior, quam A B. Poſt hæc per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per*

I, recta

I, recta I K, lateri C D, parallela, & ſic deinceps; donec omnia latera ſuas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F; factumq; erit, quod proponitur. Cũ enim angulus A, ſit communis; & angulis A B C, A F E, æquales ſint anguli A H I, A M I;



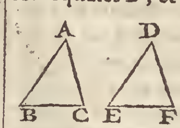
29. primi *Nec non & angulis A C B, A C D, æquales ſint anguli A I H, A I K, hoc eſt, toti angulo B C D, æqualis ſit angulus H I K; Eodemque modo angulis C D E, D E F, æquales ſint anguli I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, ſimilia ſint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, ut A B, ad*

4. ſexti. *B C, ita A H, ad H I. Rurſus, ut B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et ut C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, ut B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. ſimilia ſunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, & ſimiliter poſita.*

17. THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

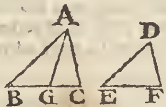
SINT triangula ſimilia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et ſit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico triangula inter ſe rationem habere duplicatã eius, quam habent latera homologa B C, & E F. Sint enim primum latera B C, E F,



26. primi æqualia; eruntque propterea triangula inter ſe æqualia, habebuntque proportionem æqualitatis, quemadmodũ & latera homologa; Atqui proportio æqualitatis

litatis duplicata ſolum efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, ut conſtat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam.) Igitur triãgulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet latus B C, ad E F. Quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo B C, latus latere E F, maius; & ex BC, ab ſcindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturq; recta A G. Quia igitur eſt ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando ut A B, ad DE, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad EF, ita eſt per conſtructionem E F, ad B G: Vt ergo A B, ad D E, ita erit E F, ad B G. Quare cum triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G; Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis B C, ad baſin B G. Igitur ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita eſt B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, ſint proportionales, erit proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata proportionis B C, primæ ad E F, ſecundam. Quare & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis B C, ad E F. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

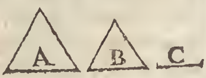


11. ſexti. *11. quinti.* *15. ſexti.* *7. quinti.* *1. ſexti.*

COROLLARIVM.

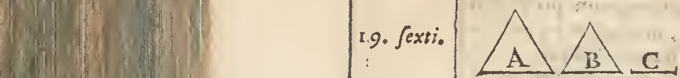
HINC manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum.

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & ſuper primam A, & ſecundam B, conſtituta triangula A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta.



DICO,

Dico, ut eſt recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita eſſe triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, eſt, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B: Cum igi-



19. ſexti. tur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

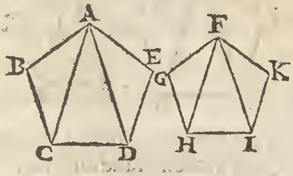
E o d e m modo oſtendes, ita eſſe triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiã ſimile ſimiliterq; deſcriptu, ut eſt prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & ſuper B, ſecundam, & A, tertiam conſtituantur triangula ſimilia ſimiliterque poſita B, & A. Dico, ut eſt recta C, ad rectã A, ita eſſe triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata eſt proportionis C, ad B, hoc eſt, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, ſunt latera homologa; Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

18. THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

S i n t polygona ſimilia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & ſic deinceps. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem A B, ad B C, ita F G, ad GH; & ut B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primo, hæc polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint A C, A D, F H, F I; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia, cũ propter ſimilitudinem habeant angulos numero æquales. Quoniam uero angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula

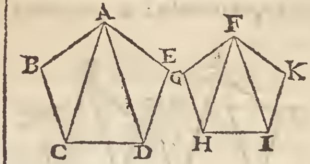
triangula A B C, F G H, habentia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G; ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter ſe ſimilia erunt. Eadem ratione erunt ſimilia triangula A E D, F K I. Deinde quia eſt ut A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, F G H; ut autem C B, ad C D, ita eſt, ex hypoteſi, H G, ad H I, ob ſimilitudinem polygonorum; Ex æquo erit ut A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; eſt autem & ablatus A C B, oſtenſus æqualis ablato FHG; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoque ſimilia. *6. ſexti.* *4. ſexti.* *22. quinti.* *6. ſexti.*



Dico præterea triangula hæc eſſe homologa totis polygonis. Quoniam ſimilia ſunt triangula A B C, F G H, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H: Atque eodem argumento proportio triãgulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I. Neque diſſimili ratione concludetur quoque eſſe triangulum A D E, ad triangulum F I K, ut A C D, ad F H I. Atque ita proportionalia ſunt triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius ſint antecedentia, & triangula alterius conſequentia proportionum. Vt autem unum antecedens ad unum conſequens, ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad ſibi reſpondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. *19. ſexti.* *12. quinti.*

Dico poſtremo, polygona inter ſe proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim ſit ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triãgulum

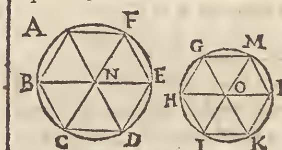
gulum uero A B C, ad triangulum F G H, habeat propor-
19. quinti. tionem duplicatam eius, quam habent latera homologa A B, F G: habebunt quoque polygo-gona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorūdem laterum homologorum A B, FG.



Itaq; ſimilia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Qvod ſi polygona ſimilia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoque in ſimilia triangula, & numero æqualia, ductis e centris circulorum ipſa circunſcribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona ſimilia, æquilatera, & æquiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circunſcribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur N A, N B, &c. Dico *triangula N C D, O I K, ſimilis eſſe. Quoniam anguli C N D, I O K, æquales ſunt; (quod æque ſubmultiplices ſint quatuor rectorum. Nam utrunque ſpacium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & quantitate æquales, ſubtenſos nimirum a baſibus æqualibus, contentosque lateribus æqualibus.) Sunt autem & latera circum ipſos proportionalia, cum utrobique ſit proportio æqualitatis; Similia*



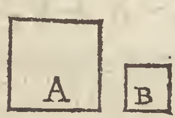
6. ſexti. *erunt triangula N C D, O I K. Eademque eſt ratio de cæteris. At uero hæc triangula eſſe homologa totis polygonis, nullo negocio demonſtrabitur. Cum enim tota polygona ſint ipſorum triangulorum æque multiplicia, ut patet, habebunt utique eandem cum ipſis proportionem.*

15. quinti *Porro ex hoc theoremate perfacile demonſtrabimus theore-*

theorema illud, quod iam aliter in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

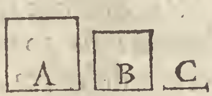
SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum eſſe quadrati B. Cum enim omnia quadrata ſint ſimilia, ut conſtat ex 1. defin. huius lib. erit, per hanc propoſ. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.



SIT iam quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum eße lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata ſit proportionis laterum homologorum, ut dictum eſt; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata eſt proportionis duplæ, ut in exemplo adducto ſuperius apparet.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum.



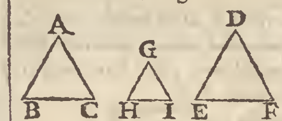
HOC non aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, quam oſtenſum fuit corollarium præcedentis theorematis ex ſuo theoremate: Vt perſpicuum eſt in hac figura appoſita.

THEOR.

20. ## THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Cum enim propter ſimilitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales ſint angulis rectilinei G H I; Item eadem de cauſa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiuſdem rectilinei G H I; erunt per communem ſententiam, anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rurſus cum ob eandem ſimilitudinem latera rectilinei A B C, proportionalia ſint lateribus rectilinei GHI, ea uidelicet, quæ circum æquales ſunt angulos; Item eandem ob cauſam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiuſdem rectilinei G H I; erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea



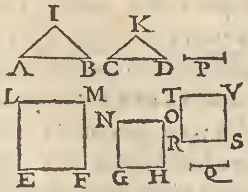
11. *quinti* nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, ſimilia exiſtent rectilinea A B C, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.

21. ## THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi a rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales,

nales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Conſtituanturque ſuper A B, C D, duo quæcunque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta A B I, C D K; Item ſuper E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea eſſe proportionalia, ut quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q, eritque ex æquo, ut A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita eſt rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, ſimile ſimiliterque deſcriptum, ex corollario propoſitionis 20. huius lib. uel ſi fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. Igitur ut A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod eſt propoſitum. *11. ſexti.* *22. quinti.* *11. quinti.*



E CONVERSO, ſint iam dicta rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, eſſe quoque proportionales, ut quidem A B ad C D, ita E F, ad G H. Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, ſuper quam deſcribatur rectilineum R S V T, ſimile rectilineo E M, & ob id rectilineo G O, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur eſt, ut A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, ut iam eſt oſtenſum, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoque ponitur E M, ad G O: Igitur erit ut E M, ad R V, ita E M, ad G O; Ac idcirco ęqualia erunt R V, G O. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque poſita, conſiſtent neceſſario, ut mox oſtendemus, ſuper rectas R S, G H, æquales. Quare erit ut E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, ut A B, ad C D. Igitur erit ut A B, ad C D, ita E F, quoque ad G H. Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. *12. ſexti.* *21. ſexti.* *11. quinti.* *9. quinti.* *7. quinti.* *11. quinti.*

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, qualia ſunt G O, R V, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt G H, R S; ſit G H, maior. Cum igitur, ob ſimilitudinem rectilineorum, ſit ut G H, ad H O, ita R S, ad S V; Ponatur autem G H, maior quam
14. quinti. R S; erit quoque H O, maior quam S V; & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cum hoc intra ipſum poſſit conſtitui; quod eſt abſurdum, cum ſit contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt rectæ G H, R S. quod eſt propoſitum.

ALITER. Sint duo rectilinea A B C, D E F, æqualia, & ſimilia ſimiliterque poſita. Dico latera homologa, cuiuſmodi ſunt rectæ A B, D E, eſſe æqualia. Si enim nõ credãtur æqualia, ſit A B, maius, quam

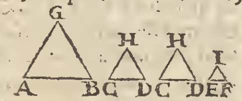


D E; inueniaturque rectis A B, D E, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, ut A B, ad D E, ita D E, ad G; Eſt autem A B, maior, quam D E: Erit quoque D E, maior, quam G; ac propterea multo maior A B, quam G. Vt uero A B, ad G, ita eſt rectilineum A B C, ad rectilineum D E F, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cũ A B, maior ſit, quam G, erit quoque rectilineum A B C, maius rectilineo D E F: quod eſt abſurdum, cum poſitum ſit æquale. Non ergo maior eſt A B, recta quam recta D E. Sed neque minor erit eadem ratione;

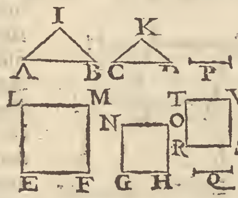
ne; quia & rectilineum A B C, minus oſtenderetur rectilineo D E F; quod eſt contra hypotheſin. Quare æquales ſunt rectæ A B, D E.

SCHOLION.

EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim ſumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonſtrauit. Cum igitur id, quod a ſecunda eſt deſcriptum, æquale ſit ei, quod a tertia, eo quod & linea ſecunda ſit æqualis tertiæ; manifeſtum eſt, quod proponitur.



BREVIUS tota hæc propoſitio demonſtrabitur, hoc modo. Ponatur primo eſſe ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico eſſe quoque ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Cum enim ſit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Itẽ proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H: erunt proportiones A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ ſunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico eſſe quoque ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Cum enim ſit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.



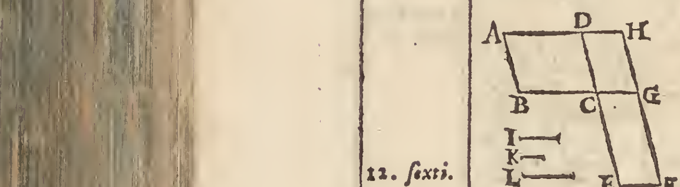
19. uel 20. ſexti.

19. uel 20. ſexti.

24. THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Sɪɴᴛ parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum eſſe compoſitam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum ſint in uno parallelogrammo, & conſequentia in altero; hoc eſt, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, ſint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H. Sumpta iam recta I,



12. ſexti. quacunque, inueniatur tribus B C,
C G, & I, quarta proportionalis K:
Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quo
1. ſexti. niam igitur eſt, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Vt autem
11. quinti. B C, ad C G, ita poſita eſt I, ad K; erit quoque ut A C,
ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento oſtendes eſſe,
22. quinti. ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C,
ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc eſt, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque

demque ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut B C, C E, efficiant unam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.

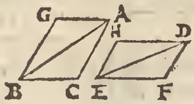
SCHOLION.

Expeditivs idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, ut prius; Cum ſit ut A C, ad C H, ita B C, ad C G: & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum. 1. ſexti.

Demonstrat hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compoſitionem proportionum pertinentia non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.

Triangvla, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam. I.

Sint triangula A B C, D E F, *angulum* C, *angulo* F, *habentia æqualem. Dico proportionem trianguli* A B C, *ad triangulũ* D E F, *compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione* B C, *ad* E F, *& ex proportione* A C, *ad* D F; *Vel ex proportione* B C, *ad* D F *& proportione* A C, *ad* E F.



Completis enim parallelogrammis C G, F H, *erunt ea æquiangula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur.* Cum ergo triangula A B C, D E F, *cum ipſis, quorum ſunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit* 23. ſexti. 15. ſexti.

quoque proportio A B C, *ad* D E F, *compoſita ex proportioni-bus laterum* B C, A C, *ad latera* E F, D F.

II. PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, *quo modo fiat, facile colligitur ex demonſtratione huius propos* 23. *Sint enim tres proportiones* A, *ad* B; C, *ad* D; & E, *ad* F. *Oportet iam ex ipſis unā proportionem componere. Fiat ut* A, *ad* B, *ita* G, *ad* H; & *ut* C, *ad* D, *ita* H, *ad* I; & *ut* E, *ad* F, *ita* I, *ad* K. *Dico proportionem* G, *ad* K, *compoſitam eſſe ex tribus datis proportionibus. Cum enim compoſita ſit ex proportionibus* G, *ad* H; H, *ad* I; & I, *ad* K, *per defin.* 5. *huius lib. compoſita etiam erit ex proportionibus* A, *ad* B; C, *ad* D; & E, & F; *quod his illæ ſumptæ ſint æquales.*



III. PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT *proportio* A, *ad* B, *minor auferenda ex proportione maiore* C, *ad* D. *Fiat, ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E; *ſtatuaturque* E, *terminus medius inter* C, & D. *Dico ablatam eſſe proportionem* A, *ad* B, *ex proportione* C, *ad* D, *reliquamque eſſe proportionem* E, *ad* D. *Cum enim proportio* C, *ad* D, *componatur ex proportionibus* C, *ad* E, & E, *ad* D: *Si proportio* C, *ad* E, *hoc eſt* A, *ad* B, *auferatur, relinquetur proportio* E, *ad* D.

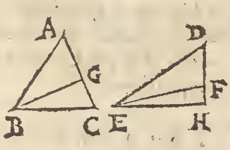


IIII. TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateri-

bus

bus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

Sint triangula A B C, D E F, *angulum* A, *angulo* D, *habentia æqualem. Dico eſſe* A B C, *ad* D E F, *ut rectangulum ſub* A B, A C, *ad rectangulum ſub* D E, D F. *Ductis enim ad* A C, D F, *perpendicularibus* B G, E H, *erunt triangula* ABG, DEH, *æquiangula, vt conſtat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. cũ duo ãguli* A, AGB, *duobus angulis* D, D H E, *ſint æquales. Igitur erit, ut* G B *ad* B A, *ita* H E, *ad* E D: *Vt autem* G B, *ad* B A, *ita eſt rectangulum ſub* B G, A C, *ad rectangulum ſub* A B, A C. (*Nam ſi baſes ponantur* G B, B A, *erit eorum eadem alitudo* A C) *Et eadem ratione, ut* H E, *ad* E D, *ita eſt rectangulum ſub* E H, D F, *ad rectangulum ſub* D E, D F. *Rectangulum igitur ſub* B G, A C, *ad rectangulum ſub* A B, A C, *eſt, ut rectangulum ſub* E H, D F, *ad rectangulum ſub* D E, D F; *& permutando, rectangulum ſub* B G, A C, *ad rectangulum ſub* E H, D F, *ut rectangulum ſub* A B, A C, *ad rectangulum ſub* D E, D F. *Sed ut rectangulum ſub* B G, A C, *ad rectangulum ſub* E H, D F, *ita eſt triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *quod hæc triangula ſint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eaſdem cum illis baſes* A C, D F, *altitudineſque eaſdem* B G, E H; *ac proinde inter eaſdem cum illis parallelas ſunt conſtituta.) Igitur erit quoque triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *ut rectangulum ſub* A B, A C, *ad rectangulum ſub* D E, D F. *Quod eſt propoſitum.*



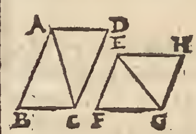
4. *ſexti.* 1. *ſexti.* 11. *quinti.* 15. *quinti.* 41. *primi*

V.

Parallelogramma inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.

Sint parallelogramma A B C D, E F G H, *æquiangula inter ſe, quorum anguli* B, *&* F, *ſint æquales. Dico eſſe,*

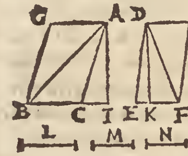
ut B D, ad F H, ita rectangulum ſub A B, B C, ad rectangulum ſub E F, F G. Ductis enim diametris A C, E G, quæ angulos æquales B, F, ſubtendant, habebunt triangula A B C, E F G, angulũ B, angulo F, æqualem. Quare, ut iam demonſtrauimus, erit, ut A B C, ad E F G, ita rectangulum ſub A B, B C, ad rectangulum ſub E F, F G. Cum ergo parallelogramma B D, F H, ean-



15. quinti. *dem habeant proportionem, quam triangula A B C, E F G,*
11. quinti. *ipſorum dimidia; Erit quoque ut B D, ad F H, ita rectangulum ſub A B, B C, ad rectangulum ſub E F, F G. Quod eſt propoſitum.*

VI. TRIANGVLA, & parallelogramma inter ſe proportionem habent cõpoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.

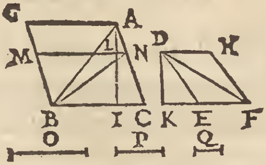
SINT triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I, D K. Dico eorum proportionem compoſitam eſſe ex proportione baſis B C, ad baſin E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K. Sint enim primũ altitudines æquales, baſes uero uel æquales etiã, uel inæquales: Fiatque, ut B C, ad E F, ita L, ad M; Vt autem A I, ad D K, ita M, ad N. Quo facto, erit M, ipſi N, æqualis, quod & A I ipſi D K,



7. quinti. *æqualis ponitur; Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc eſt, ut B C, ad*
1. ſexti. *E F. At uero, ut B C, ad E F, ita eſt triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H. Igitur quoque erit, ut L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H; Sed proportio L, ad N, compoſita eſt ex proportione L, ad M, hoc eſt, baſis B C, ad baſin E F; & ex proportione M, ad N, hoc eſt, altitudinis A I, ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & pa-*

& parallelogrammi C G, ad parallelogrammi E H, ex eiſdem proportionibus eſt compoſita. Quod eſt propoſitum.

SINT iam altitudines A I, D K, inæquales, & A I, maior; baſes vero B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abſciſſa deinde I L, æquali ipſi D K; ducatur per L, ipſi B C, parallela L M, ſecãs A C, in N, iungaturq́; recta B N. Quoniam igitur eſt triangulum A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad



parallelogrammum C M, ut altitudo A I, ad altitudinem IL, vel ad D K, ipſi I L, æqualem, hoc eſt, ut O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. oſtendimus: Et ut triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, ita eſt, baſis B C, ad baſin E F, (cum eadẽ ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q. erit ex æquo A B C, ad DEF, & C G, ad E H, ut O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, baſis B C, ad baſin E F: Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod eſt propoſitum. 1. ſexti.

EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, compoſita eſſe ex ꝓportione baſis EF, ad baſin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinẽ A I. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius, erit triangulũ DEF, ad triangulũ NBC, & parallelogrammũ EH, ad parallelogrammum C M, vt EF, ad BC, hoc eſt, ut Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, ſeu D K, ad A I, hoc eſt, vt P, ad O. Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, EF, 1. ſexti.

E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc eſt, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eiſdem proportionibus.

22. THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

Esto parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctū I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogrāma circa diametrũ, nępe E G, F H, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti, facile oſtendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam angulus G A E, idem eſt qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum eſt E G, ipſi B D: Et eadē ratione eidem B D, equiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum ſit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perſpicuum eſt ex 29. propos. lib. 1. uel etiam ex coroll.



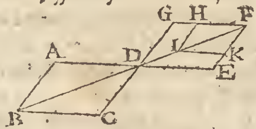
4. *ſexti.* propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A,
22. *quinti.* ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe ꝓportionalia. Quare per definitionem, ſimile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte oſtendes parallelogrammum

mum F H, ſimile eſſe eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum. 21. ſexti.

SCHOLION.

INTELLIGENDA autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius, eſſe talia, quæ habeant unum angulũ cum toto parallelogrammo communem, ut manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.

QVOD ſi circa diametrum alicuius parallelogrãmi productam conſiſtat parallelogrammum aliud; ita ut duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, uel certe illa his ſint parallela, iiſdem fere mediis oſtendetur, hoc illi eſſe ſimile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter B D, ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum D E F G, cuius



duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, ſimile eſſe parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter ſe ſint æquiangula, facile oſtendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, æqualis eſt angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque eſt alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppoſiti C, & E, æquales quoque erunt. Rurſus quia anguli A D C, G D E, ad uerticem, ſunt æquales, erunt his quoque oppoſiti A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula ſunt G E, A C, parallelogramma. Quod autẽ latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perſpicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulũ ſit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, vt conſtat ex propos. 29. lib. 1. Erit vt B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rurſus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D; & ut D B, ad D C, ita F D, ad F E; ac propterea ex æquo vt A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non ſecus oſtendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia eſſe.

Margin notes: 34. primi — 15. primi — 34. primi — 4. ſexti.

Quare

Quare ſimilia ſunt parallelogramma A C, G E. Quod ſi circa eandem diametrum conſiſtat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonſtrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, ſimile ipſi GE, ut Euclides demonſtrauit: Atqui eidem G E, ſimile eſt quoq;
21. ſexti. *A C, vt nunc oſtendimus. Igitur & H K, A C, inter ſe ſimilia ſunt. Quod eſt propoſitum.*

SED & abſoluemus cum Peletario ſequens problema.

DATIS duobus parallelogrammmis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare.

DVO parallelogramma æquiangula, ſed non ſimilia, ſint A B C D, C E F G, & ex A B C D, abſcindendum ſit parallelogrammum ipſi C E F G, ſimile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita ut ſit una linea recta B C G, & propterea ut ad ppos. 15. lib. 1. demõſtratum eſt, ECD, quoq; una recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, ſecet uel latus A D, uel latus A B; & per H, ducatur H I, parallela ipſi A B, vel ipſi A D. Dico parallelogramum abſciſſum H C, ſimile eſſe ipſi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum; Quare inter ſe ſimilia, vt Euclides demonſtrauit in hac propoſitione.

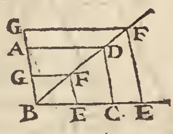


EADEM autem arte fere alterutrum ipſorum augeri poterit, ut fiat ſimile alteri. Sit enim augendum A B C D, ut fiat ipſi C E F G, ſimile. Coniungantur vti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H, ſecet uel latus B A, protractum, uel latus D A, protractum. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipſi A D, uel ipſi A B, donec ſecet vel C D, protractam, uel CB, protractam in I. Dico parallelogrãmum auctum H C, ſimile eſſe parallelogrammo C F. Nam ſi com-



compleatur totum parallelogrammum K L, *conſiſtent H C, CF, circa diametrum; Quare ſimilia inter ſe erunt.*

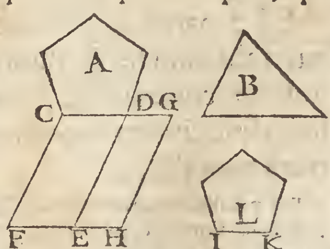
PERSPICVVM *autem eſt ex demonſtratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis propoſiti in hoc Scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non ſolum eſſe ſimilia; Verum etiam ſimiliter poſita. Vnde propoſito quouis parallelogrammo* A B C D, *ſi maius debeat deſcribi illi ſimile ſimiliterque poſitum, producendum erit latus unum, nẽpe* B C; *Atque ex E, quolibet puncto ultra C, ipſi C D, parallela E F, ducenda, ſecans diametrũ* B D, *productã in F; & per F, ducenda F G, parallela ipſi* A D, *occurrens rectæ* B A, *productæ in G. Erit enim parallelogrammum G E, ſimile ſimiliterque poſitum ipſi* A C, *& maius eodem. Quod ſi minus debeat deſcribi, ſumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, ceu figura indicat.*



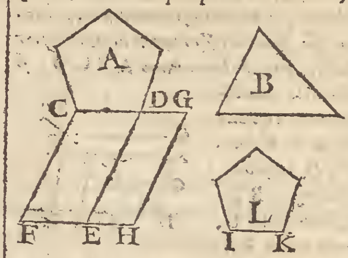
PROBL. 7. PROPOS. 25. 25.

DATO rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; ſitque conſtituendum aliud rectilineum, quod ſimile quidem ſit ipſi A, æquale uero ipſi B. Super C D, unum latus rectilinei, cui ſimile debet conſtitui, conſtituatur parallelogrãmum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et ſuper rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis ſit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipſi B; eritque C D G, linea una 44. uel 45. primi.



una recta, nec nõ F E H, ceu demonſtratum fuit propos. 45.
13. ſexti. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, D G, tertia propor-
18. ſexti. tionalis I K, ſuper quam conſtituatur rectilineum L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitũ. Dico L, æquale etiã eſſe alteri rectilineo B. Cũ enim ſint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit per coroll. propos. 20. huius lib. ut C D, prima ad D G, tertia, ita A, rectilineum ſuper primam C D, ad rectilineum L, ſuper I K, ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptũ.



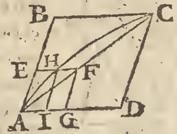
1. ſexti. Vt autem C D, ad D G, ita eſt parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiuſdem altitudinis. Igitur erit ut C E, ad D H, ita A, ad L. Vt autẽ C E, ad D H, ita eſt A, ad B, propter æqualitatem parallelogrammorum, & ho-
11. quinti. rum rectilineorum. Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; pro-
9. quinti. ptereaq; æqualia erunt rectilinea B, & L. Eſt autem & L, ſimile ipſi A, per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum,

23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

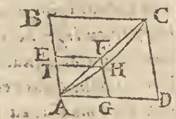
E x parallelogrammo B D, abſciſſum ſit pallelogrammũ E G, ſimile ſimiliterq; poſitum, habens cum ipſo angulũ cõmunem E A G. Dico E G, conſiſtere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ ſi fuerint una linea

linea recta, perſpicuum eſt, cum A F, ſit diameter ipſius EG,
& A C, diameter ipſius B D, parallelogrammum E G, con-
ſiſtere circa diametrũ A F C, totius parallelogrammi. Quod
ſi A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur to-
tius parallelogrammi diameter A C, ſe-
cans latus E F, in H puncto, per quod
ipſi F G, parallela agatur H I. Quoniã
igitur parallelogramma B D, E I, ſunt
circa eandem diametrum A H C, ipſa

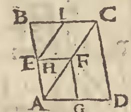


erunt ſimilia, ſimiliterq; poſita. Quarè 24. ſexti.
erit ut B A, ad A D, ita E A, ad A I: Sed ut B A, ad A D, ita
quoque eſt E A, ad A G; quod parallelogramma B D, EG,
ponantur ſimilia, ſimiliterque poſita. Igitur erit ut E A, ad 11. quinti.
A I, ita E A, ad A G. Ac propterea æquales erunt rectæ 9. quinti.
A I, A G; pars, & totum; quod eſt abſurdum.

Qvod ſi dicatur recta A H C, ſecare alterum latus FG;
Tunc ducta H I, parallela ipſi E F, erunt
rurſus ſimilia parallelogramma B D, IG, 24. ſexti.
ſimiliterq; poſita. Quare erit ut DA, ad
AB, ita GA, ad A I: Sed ut DA, ad AB,
ita quoque eſt G A, ad A E, ob ſimilitu

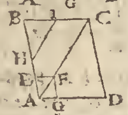


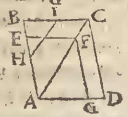
dinem parallelogrammorum BD, EG; Igitur erit ut G A, ad 11. quinti.
A I, ita G A, ad A E; ideoq; æquales erunt rectæ A I, A E; 9. quinti.
pars & totum: Quod eſt abſurdum. Itaq; ſi a parallelogrã-
mo parallelogrammum ablatum ſit, &c. Quod erat de-
monſtrandum.



SCHOLION.

*Aliter idem theorema demonſtrabi-
mus oſtenſiue, hoc modo. Diuiſis lateribus A B,
B C, bifariam in punctis H, I, ſiue punctum
H, cadat in punctum E, ſiue ſupra, ſiue infra;
ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur,
propter ſimilitudinem parallelogrammorum,
eſt ut A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autẽ
tota A B ad totam B C, ita eſt dimidia HB, ad* 15. quinti.
dimidiam B I; Erit ut H B, ad B I; ita A E, 11. quinti
ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cum habeant circa





angulos

angulos æquales B, E, latera proportionalia, erunt æquian-
6. ſexti. gula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF,
externum, & internum inter rectas H I, A F.
28. primi Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniã
uero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, du-
2. ſexti. ci concipitur, parallela quoq; eſt rectæ H I. pro-
pterea quod latera A B, BC, trianguli tunc cõ-
ſtituti A B C, proportionaliter eſſent ſecta in
H, & I, vtpote bifariam; efficitur, ut ducta re-
cta A C, eadem fiat quæ A F, tranſeatq; per
punctum F; cum ex puncto A, ſolum una li-
nea parallela rectæ H I, poſſit duci, ut manife-
ſtum eſt. Conſiſtunt ergo B D, E G, parallelo-
gramma circa eandem diametrum A F C.
Quod eſt propoſitum.

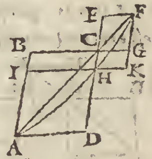


QVOD ſi duo parallelogramma ſimilia ſimiliterq; poſita non habeant angulum communem, ſed unum ſit extra aliud, hac tamen lege, ut ita ſint connexa inter ſe ſecundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas conſtituant: demonſtrabimus iiſdem fere mediis, ea circa eandem conſiſtere diametrum. Sint enim duo parallelogramma ſimilia ſimiliterque poſita BD, EG, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungãtur, ut lineæ B C, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15 lib. 1, oſtendimus, lineæ D C, C E, unam quoq; lineã rectam componant. Dico parallelogrãma BD, E G, circa eandem conſiſtere diametrum, hoc eſt, diametrum A C, cum diametro FC, unam rectam lineam conficere. Si enim A C, FC, nõ faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta ſecans BC, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipſi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogrãma BI, K G, circa eandem diametrum A H F, productam conſiſtunt, efficiuntq; duæ rectæ B H, H I, cum duabus rectis H G, HK, lineas rectas, ipſa erunt ſimilia ſimiliterq; poſita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonſtrauimus. Quare erit ut HB, ad B A, ita F K, ad K H. Habet autem C B, maior ad B A,
8. quinti. maiorem proportionem, quam H B, minor ad eandem B A; &



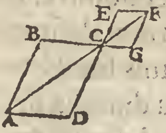
eſt ut C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur ſimilia ſimiliterque deſcripta: Igitur & F E, ad E C, hoc eſt, ad ſibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quàm H B, ad B A, hoc eſt, quam F K, ad K H. Quã obrem cum F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H, erit F E, maior quam F K; pars quam 10. quinti.
totum: Quod eſt abſurdum.

QVOD ſi quis dicat, *rectam A H F, ſecare latus C D. Tunc per H, ducta rectæ B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K; erunt rurſus ſimilia ſimiliterque poſita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. oſtendimus. Quare erit ut H D, ad D A, ita F K, ad K H. Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionẽ, quam H D, ad D A; Et eſt ut C D, ad D A, ita F G, ad* 8. quinti.



G C, propterea quod parallelogramma B D, E G, ſimilia ſimiliterque poſita ſunt conceſſa; Igitur & F G, ad G C, hoc eſt, ad ſibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H; ideoque F G, maior erit, quam F K, pars quam 10. quinti.
totum: Quod eſt abſurdum.

OSTENSIVE *idem hac ratione oſtendetur. Quoniam propter ſimilitudinem parallelogrammorum B D, E G, anguli B, E, ſunt æquales, eſtque ut A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia, ac idcirco æquiangula erunt, habe-* 6. ſexti.
buntque angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales; ſed hi inter parallelas B C, E F, æquales ſunt duobus rectis. Quare & B C A, B C F, duobus 29. primi
erunt rectis æquales; Ac propterea A C, F C, unam component rectam lineam. 14. primi
Quod eſt propoſitum.



RECTE *autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a toto ablatum non ſolum eſſe toti ſimile, verum etiã ſimiliter poſitũ, vt oſtẽdatur circa eandẽ cũ toto diametrũ. Nam ſi ex altera parte longiori B D, abſcindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum conſiſtens,*

Ee erit

24. ſexti. *erit E G, ipſi B D, ſimile ſimiliterque poſitum. At vero ſi in rectangulo I L, quod ſit æquilaterũ ipſi B D, ſumatur H M, æqualis ipſi E ; & M N, æqualis ipſi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, æquale & ſimile rectangulo E G, propter æqualitatẽ laterum, & angulorum, qui ſunt recti, & ob id ſimile rectangulo I L; ſed tamen quia non eſt ſimiliter poſitum, non conſiſtit circa eandem cum toto I L, diametrum.*



IDEM quoque hic perſpicitur in rectangulis, quorum unũ eſt extra alterum, ſecundum tamen angulos eorum ita interſe connexa, ut duo latera unius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia ſunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam eſt ſimiliter poſitum: At vero M O, minime conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non eſt ſimiliter poſitum, quamuis ſimile ſit, cũ prorſus ſit æquale ipſi E G. Nam K M, æqualis eſt ipſi E F, & M N, ipſi E C, &c.



26. ## THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei, quod a dimidia deſcribitur; maximũ id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammũ ſimile exiſtens defectui.

DETVR recta A B, diuiſa bifariam in C, ſuperq; eius dimidiam B C, conſtituatur quodcunque parallelogrammũ C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum paralle-

parallelogrammum A B E H, erit parallelogrãmum A D, ſuper dimidiam A C, conſiſtens, applicatum ſecundũ A B, deficiens parallelogrammo C E, & exiſtens ſimile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum, deficiensque parallelogrammo C E, maximum eſſe omnium, quę ſecundum A B, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis ipſi C E. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ ſint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, ſecundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, quod ipſi C E, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem cum C E, diametrum. Quoniam uero complementa C G, G E, æqualia ſunt; ſi addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: Eſt autem C I, æquale ipſi C F, propter baſes æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius ſit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonẽ parallelogrãmum adhuc D G,) erit quoq; A D, æquale exiſtens ipſi C E, propter baſes ęquales A C, C B, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemq; modo oſtendetur A D, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam A B, applicantur, ut punctum G, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupant maiorem lineam dimidia A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus ſimiles ſint ipſi C E.



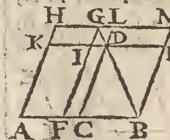
24. *ſexti.*
43. *primi*
36. *primi*
36. *primi*

Aliter demonſtrabitur A D, maius eſſe parallelogrammo A G, hoc modo. Parallelogramma F D, D I, ſunt æqualia, cum baſes H D, D E, ſint æquales: Eſt autem D I, maius quam G E, hoc eſt, quam complementum C G, ſibi æquale, parallelogrammo D G; Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Ac idcirco addito communi C F, maius erit A D, quam A G, parallelogrãmo eodem D G.

36. *primi*
43. *primi*

Qvod ſi punctum G, ſumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta

HM, quæ ſit parallela ipſi AB, occurratq; rectis AK, BE, protractis in H, & M. Itẽ ducta GF, parallela ipſi AH; erit parallelogrammũ AG, applicatum ſecundum rectam AB, deficiẽs parallelogrammmo FM, quod ipſi CE, eſt ſimile ſimiliterque poſitũ, cum ſit circa eandem diametrum cum



24. *ſexti.* CE; Dico adhuc maius eſſe AD, ipſo AG. Protracta enim

34. *primi* CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, ideoque æqualia

36. *primi* parallelogramma HD, DM. Cum igitur DM, ſit æquale complemento DF, erit & HD, æquale ipſi DF. Eſt autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL, Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iiſdem argumentis cõcludes AD, maius eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam AB, ut punctum G, ſit ultra D, in diametro BD, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam dimidia AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidia AC, qualis eſt AK, in priori figura, uel minorem, cuiuſmodi eſt AF, in figura poſteriori: prout punctum G, ſumitur uel in diametro BD, uel in ea producta ad partes D.

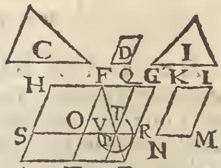
27.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis

lis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui ſimile deeſſe debet.

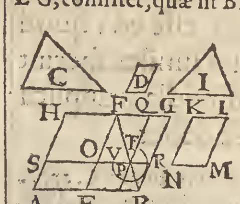
Ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod ſit ſimile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, biſariam in E, ſuper medietatem E B, deſcribatur parallelogrammum E F G B, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale eſt ipſi C, cum ſit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo E G, ſimili ipſi D, factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius eſt quam C. (Neque enim minus erit. Nam cum per præcedentem ipſum ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari ullum ad A B, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora: Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; ſibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua uero ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad ꝓpos. 45. lib. 1.) & cõſtituatur parallelogrammũ KLMN, ſimile quidem ipſi D, ſeu ipſi E G, æquale uero exceſſui inuento I, ut ſit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, ſimul, & ob id maius quam K M. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit ut E F, ad FG, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, FG, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, uel minora, eſſet etiam E G, æquale ipſi N L, uel minus, ut conſtat. Quare abſciſſis rectis F O, FQ, quæ ſint æquales ipſis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipſi



18. ſexti.

25. ſexti.

L N, æquale, & eidem ſimile ſimiliterque poſitum, & pro-
26. *ſexti.* pterea ipſi E G: atque adeo circa eandem diametrum cum
E G, conſiſtet, quæ ſit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit

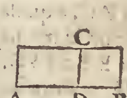


parallelogrammũ A P, ad rectam
A B, applicatũ, deficiẽs parallelo-
24. *ſexti.* grãmo P B, quod ſimile eſt ipſi E G,
& propterea ipſi D. Dico igitur A P,
43. *primi* æquale eſſe ipſi C, rectilineo. Nã
cũ P G, æquale ſit cõplemẽto P E;
ſi addatur cõmune P B, erit & B Q,
æquale ipſi E R, hoc eſt, ipſi E S,
36. *primi* quod æquale eſt ipſi E R, pro-
pter baſes æquales E A, E B. Quare ſi æqualibus A O, B Q,
commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed
gnomon T V, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cum E G,
parallelogrammum æquale ſit ipſi C, una cum L N; ſi aufe-
rantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipſi C,
æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam
ergo A B, applicatum eſt parallelogrammum A P, deficiens
parallelogrammo P B, quod ſimile eſt dato parallelogrãmo
D, & æquale rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

*M*OVENT *hoc in loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta noſtram conſtructionem locum non habet, cum ſuper E B, conſtituerimus E G, parallelogrammum non ſolum ſimile ipſi D, verum etiam ſimiliter poſitum; quod ipſi minime fecerunt. Qua de re conſule eorum commentarios.*

PERSPICVVM *autem ex dictis eſt, ſi ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipſum applicatum æquale eſſe rectangulo, quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factis continetur.*



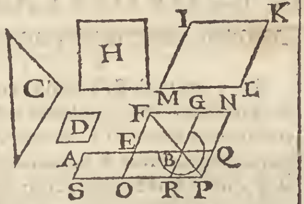
Vt ſi ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum ſub A D, & D C; Cum ergo D C, æqualis ſit ipſi D B, propter quadratũ C B; continebitur quoq; A C, ſub ſegmentis A D, D B, per applicationẽ factis.

PROBL.

PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

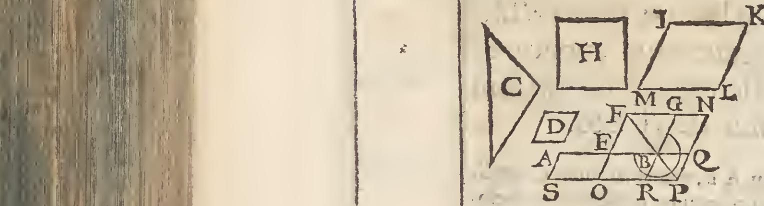
AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

Ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit dato alteri parallelogrammo D. Diuiſa A B, bifariam in E; ſuper dimidiam E B, conſtruatur parallelogrammum E F G B, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum. *18. ſexti.* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G con *14. ſecundi* ſtituatur quadratum H, æquale, cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, ſimile uero ipſi E G, ſimiliterque poſitum; *25. ſexti.* eritque propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale eſt quadrato H, quod cõſtructũ eſt rectilineo C, una cum parallelogrammo E G, ęquale. Cum igitur ob ſimilitudinẽ M K, E G, ſit ut M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoq; latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, uel



minora, eſſet quoque M K, uel æquale ipſi E G, uel minus, ut perſpicuum eſt. Productis igitur F E, F G, ut rectæ F O, F N, æquales ſint rectis I M, I K, & completo parallelogrãmo O N, erit hoc ſimile ſimiliterque poſitum ipſi E G, cũ ſit æquale ipſi M K, & ſimile. Quare ON, E G, circa eandem diametrum conſiſtent, quæ ſit F P. *26. ſexti.* Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipſi F O, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod ſimile eſt *24. ſexti.* ipſi E G, ac propterea ipſi D. Dico igitur A P, æquale eſſe rectilineo C. Nam cũ A O, E R, ſint æqualia; & E R, ęqua *36. primi*

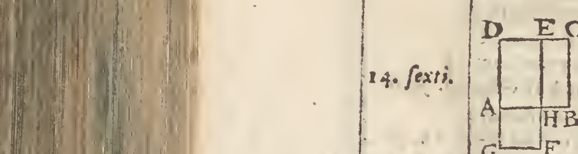
43. *primi* le complemento B N, erit & A O, ipſi B N, æquale; Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni EPN. Atqui gnomon EPN, æqualis eſt rectilineo C, (nam cum M K, hoc eſt, O N, æquale ſit rectilineo C, una cum E G; Si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P N, & rectilineū C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum eſt A P, excedens parallelogrãmo R Q, quod ſimile eſt alteri dato D. Quod faciendum erat.



29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatã, extrema, ac media ratione ſecare.

Sit recta A B, ſecanda extrema ac media ratione. Deſcripto ſuper eam quadrato ABCD; ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens
29. *ſexti.* parallelogrammo A F, ſimili ipſi quadrato, eritq; propterea A F, quoq; quadratum, cum quadrato ſolum quadratum ſit ſimile. Secet deinde recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in G, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Cum enim æqualia ſint D F, & A C; ſi demattur cõmune A E, remanebunt æqualia G H, H C; quæ cum habeant angulos æquales A H F, B H E, utpote rectos; erunt latera circa illos
14. *ſexti.* reciproca; hoc eſt, erit ut E H, hoc eſt, ut A B, ſibi æqualis, ad H F, hoc eſt, ad A H, ſibi æqualem, ut A H, ad H B. Quare ſecta eſt A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propoſitam ergo rectam lineã terminatam, &c. Quod erat faciendum.



ALITER

Aliter oſtendemus A B, eſſe ſectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur A B, A H, H B, ſitq; rectangulum H C, comprehenſum ſub prima A B, & tertia H B, æquale quadrato mediæ A H; erunt ipſæ proportionales, ut A B quidē ad A H, ita A H, ad H B. Quare per definitionem ſecta eſt A B, in H, extrema ac media ratione. 17. ſexti.

Aliter totum problema conficiemus. Diuidatur A B, in C, ita ut rectangulum ſub tota A B, & ſegmento C B, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti A C. Dico A B, in C, eſſe ſectam extrema ac media ratione. Erunt enim rurſus, ut prius, tres lineæ A B, A C, C B, continue proportionales. Conſtat ergo propoſitum. 11. ſecundi 17. ſexti.



SCHOLION.

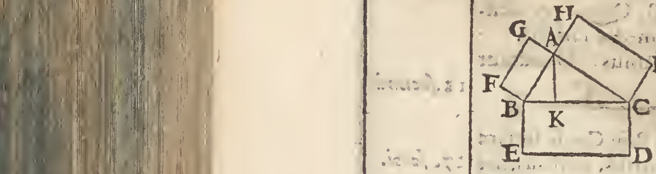
Habet admiranda hæc ſectio lineæ extrema ac media ratione inſignes utilitates, proprietateſque, ceu in libris Stereometriæ manifeſtum erit, ut nō ſine cauſa a plerisque Mathematicis linea ita diuiſa diuinam quodammodo, ob admirabilē eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs uero ſimpliciter uocetur diuiſa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum ſubtendēte deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus, rectū angulum continentibus deſcribuntur.

Triangulum rectangulum ſit ABC, habens angulum B A C, rectū; deſcribaturq; ſuper B C, quæcunq; figura rectilinea B C D E, cui ſimiles ſimiliterq; poſitæ ſuper A B, A C, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram B D, æqualem eſſe duabus figuris A F, A I. Demiſſa enim ex A, ad B C, perpendiculari A K; erit per corollarium propos. 8. huius 18. ſexti.

huius lib. ut B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare ut B C, ad C K, prima linea ad tertiã, ita figura B D, ſuper primã, ad figuram C H, ſuper ſecundam ſimiliter poſitã, per coroll. propoſ. 19. uel 20. huius lib. & conuertendo ut C K, ad B C; ita figura C H, ad figurã B D. Non ſecus oſtendetur, eſſe quoque ut B K, ad B C, ita figuram B G, ad figurã B D; cum tres lineæ B C, B A, B K, ſint quoq; proportionales, &c. Quoniã igitur eſt ut C K, prima quantitas ad B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut B K, quinta quantitas ad B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad



24. *quinti.* B D, quartam; erit ut prima C K, cum quinta B K, ad B C, ſecundam, ita tertia C H, cum ſexta B G, ad B D, quartã. Sunt autem prima C K, & quinta B K, ſimul æquales ſecundæ B C; ergo tertia C H, & ſexta B G, ſimul æquales quoque erunt quartæ B D. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat oſtendendum.

8. *ſexti.* ALITER. Cum triangulo A B C, ſimile ſit triangulũ K A C, ſintq; homologa latera ipſorum BC, CA; (Nam eſt ut B C, ad C A, in triãgulo A B C, ita C A, ad C K, in triãgulo

19. *ſexti.* K A C) habebit triangulũ K A C, ad triangulũ A B C, duplicatã proportionem eius, quam habet C A, ad B C. Habet autẽ

19. *uel* 20. *ſexti.* & figura C H, ad figuram B D, proportionẽ duplicatã proportionis C A, ad B C. Quare erit ut triangulũ K A C, ad

11. *quinti.* triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione oſtendetur eſſe, ut triangulũ K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rurſus eſt, ut K A C, prima quantitas ad A B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut K B A, quinta ad ad A B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; erit &

24 *quinti.* prima K A C, compoſita cum quinta K B A, ad ſecundam A B C, ita compoſita tertia, C H, cum ſexta B G, ad quartam B D. Sunt autẽ K A C, K B A, prima & quinta ſimul, æquales ſecundæ A B C: Igitur & C H, B G, tertia & ſexta ſimul, æquales erunt quartæ B D.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, ſecundam quantitatem, ita eſt figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem,

titatem, cum utraque proportio ſit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit ut quadratũ rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, ſecundã quantitatẽ, ita figura B G, ſexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nẽpe quadratũ rectę A C, cum quadrato rectæ A B, ad ſecundã, hoc eſt, ad quadratũ rectæ B C, ita tertia quantitas cum ſexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, nempe ad figuram B D: Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, ſimul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt.

19. uel 20 ſexti.

24. quinti.

47. primi

SCHOLION.

VIDES igitur, longe eſſe uniuerſalius theorema hoc Euclidis, quod ſe ſe ad omnes figuras ſimiles ſimiliterque deſcriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod ſola quadrata includit, ut propos. 47. primi lib. monuimus. Eſt tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonſtrauimus, adhuc vniuerſalius hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisque etiam non ſimilibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque ſimilibus, & ſimiliter poſitis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano nõ aliter, quam 47. propoſitionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab uno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DETVR triangulum A B C, ſitque figura quæuis ſuper latus B C, deſcripta æqualis duabus figuris ſibi ſimilibus ſimiliterq; deſcriptis ſuper reliqua latera A B, A C. Dico angulũ B A C, eſſe rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ ſit ipſi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniã igitur angulus C A D, rectus eſt, erit figura ſuper C D, (quæ ſimilis

31. ſexti. ſimilis ſit ei, quæ ſuper B C, ſimiliterque poſita) deſcripta æqualis figuris ſuper A D, A C, deſcriptis, quæ ei ſimiles ſint, ſimiliterque poſitæ: Eſt autem figura ſuper AD, æqualis figuræ ſuper AB, ob æqualitatem laterum; Quare figura ſuper CD, æqualis erit figuris ſuper A B, A C. Cum igitur figura ſuper B C, eiſdẽ figuris ſuper A B, BC, æqualis ponatur; erunt figuræ ſuper C D, BC, inter ſe æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, ut conſtat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & baſis D C, oſtenſa eſt quoque æqualis baſi B C; erunt anguli

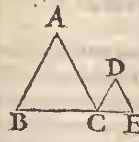


8. primi D A C, B A C, æquales. Quare cum DAC, rectus ſit, ex conſtructione, rectus quoque erit BAC; quod eſt propoſitum.

30. THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum unum angulum compoſita fuerint, ita ut homologa eorum latera ſint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineã collocata reperiẽtur.

HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE; componanturque ad angulum A C D, ita ut latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter ſe ſint parallela. Dico duo latera reliqua B C, CE, rectam cõponere lineam. Cum enim parallelæ ſint AB, DC, erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter ſe quoque exiſtent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipſa erũt inter



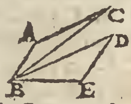
29. primi

inter ſe æquiãgula, habebuntq; æquales angulos B,& DCE. 6. *ſexti.*
Additis ergo æqualibus A,& ACD, erunt duo anguli B,& A, duobus angulis DCE, ACD, hoc eſt, angulo ACE, æquales. Rurſus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis;ergo & duo ACE,ACB, 32. *primi*
duobus erunt rectis æquales: Ac idcirco BC,CE, unam rectam lineam conſtituent. 14. *primi*
Itaque ſi duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

*D*EBENT *autem prædicta duo triangula ita ſecundum vnum angulum eſſe compoſita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehenſus, alternus ſit illi angulo, ſecundum quem triangula cõponuntur; veluti in ſchemate theorematis factum eſſe vides. Nam angulo ACD, ſecundum quẽ triangula ſunt compoſita, alternus eſt tam angulus A, quam angulus D, quorum uterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, eſſe æquales, & propterea triangula eſſe æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonſtratione liquet.*

*Q*VOD *ſi vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehenſus non fuerit alternus angulo, ſecundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheſes theorematis ſeruentur, non colligitur neceſſario concluſio. Nam duo triãgula A B C, D B E, habent duo latera A B,* A C, *duobus lateribus* D E, D B, *proportionalia, vt quidem A B, ad* A C, *ita* D E, *ad* D B; *compoſitaque ſunt ad angulum* CBD, *ita vt tam homologa latera* A B, D E, *quam* A C, D B, *ſint parallela: Nihilominus reliqua duo latera* C B, B E, *non conſtituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo* C B D, *non ſit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, ut perſpicuum eſt. Quamobrem demonſtratio theorematis locum non habet.*

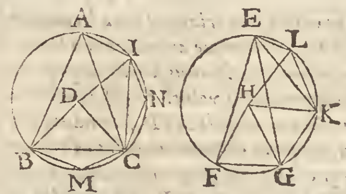


THEOR.

32. THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper uero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; ſumanturque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem inſiſtãt anguli B D C, F H G; ad circunferentias uero anguli B A C, F E G. Dico eſſe ut arcũ B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad



angulum F H G; & angulum B A C, ad angulum F E G; & ſectorem B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad ſectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, applicentur ipſis in circulis æquales rectæ, C I, quidem ipſi B C, At uero G K, K L, ipſi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales ſunt rectæ B C, C I, erunt quoque æquales arcus B C, C I, ac propterea anguli B D C, C D I, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus F G, G K, K L, & anguli F H G, G H K, K H L. Quã multiplex ergo eſt arcus B C I, ipſius arcus B C, tam multiplex erit angulus B D I, ſeu aggregatum angulorum prope centrum D, inſiſtentium arcui B C I, anguli B D C: Et quã multiplex eſt arcus F G K L, ipſius arcus F G, tam multiplex erit angulus F H L, ſeu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui F G K L, inſiſtentium, anguli F H G: quia in tot angulos æquales diuiſi ſunt anguli B D I, F H L, in quot arcus æquales ſecti ſunt arcus B C I, F G K L. Quoniã uero

1. quarti. *28. tertij.* *27. tertij.*

uero ſi arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, neceſſario angulus B D I, angulo F H L, æqualis eſt; Ac proinde ſi arcus B C I, maior fuerit arcu F G K L, neceſſario angulus B D I, maior eſt angulo F H L; & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & angulus B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab F G K L, arcu, & angulo F H L, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG, & quartę F H G; uel una æqualia erũt; uel una excedent; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Quare quæ proportio eſt arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, ſecundam magnitudinem, ea erit anguli B D C, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem. *27. tertij.* *6. defin. 5.*

QVONIAM uero, ut angulus B D C, ad angulum F H G, ita eſt angulus B A C, ad angulum F E G, cum illi horum ſint dupli; perſpicuum eſt, ita eſſe quoque angulum B A C, ad angulum F E G, ut eſt arcus B C, ad arcum F G. Quod tamen eiſdem argumentis demõſtrari poteſt, quibus uſi ſumus in angulis ad centra conſtitutis, ſi prius ducãtur rectæ I A, K E, L E. *15. quinti* *20. tertij.* *11. quinti.*

CONSTITVANTVR iam in ſegmentis B C, C I, anguli B M C, C N I, qui æquales erunt, cum inſiſtant arcubus æqualibus B A C, C B A I: Quare ſimilia erunt ſegmenta B M C, C N I, atque adeò inter ſe æqualia, propterea quod ſint ſuper rectas B C, C I, quæ inter ſe ſunt æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, quæ æqualia quoque ſunt, fient ſectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit ſector B D I, ſectoris BDC, quã eſt multiplex arcus B C I, ipſius arcus BC. Similiter oſtendemus, ſectorem F H L, tam multiplicem eſſe ſectoris F H G, quam multiplex eſt arcus FGKL, ipſius arcus FG. Quoniã uero ſi arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, ſector quoque B D I, ſectori F H L, æqualis eſt; (ceu in ſectoribus B D C, C D I, oſtenſum fuit.) & ſi maior, maior; & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & ſector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & ſectore F H L, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; uel una æqualia erunt; uel una excedent; ſi ea ſumantur, *27. tertij.* *24. tertij.* *4. primi.*

6.defin.5. quæ inter ſe reſpondent. Quamobrem quæ proportio eſt arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad ſectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM. I.

11. quinti. Hinc manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, ut eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. Quare & inter ſe eædem erunt.

COROLLARIVM. II.

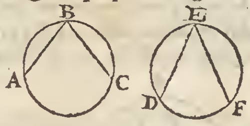
Perspicvvm quoque eſt, ut eſt angulus ad centrum ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contra, ut ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circunferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum. Nam ut eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita eſt
33. ſexti. arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quamobrem erit ut angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiã, per ea, quæ ad 4. propos. lib. 5. demonſtrauimus. Quod eſt primum. Quoniam igitur eſt ut angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circunferentiam; erit & conuertendo, ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcũ angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur. Cum ſit, ut angulus rectus in centro ad
33. ſexti. angulum in centro, ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 4 lib. 5. oſtendimus, ut quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitũ.

SCHOLION.

Caeterum ex theoremate hoc luce clarius colligitũ angulũ, qui circunferentiæ alicui inſiſtit, referendum eſſe ad arcũ, qui baſis eſt ipſius anguli, non autem ad arcum in quo exiſtit. Non enim eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, ſi ſumantur arcus, in quibus anguli exiſtunt, vt uult Euclides. in propoſito hoc theoremate. Sint enim circuli

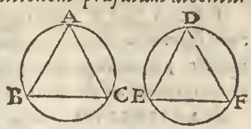
æquales

æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentiam cõſtituti ſint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo poſito erit arcus A C, maior arcu D F, ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli B, ad angulũ E, eſt maioris inæqualitatis; proportio uero arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum.



Quod ſi ſumamus arcus, ſuper quos anguli aſcenderunt, quales ſunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, ut arcus A C, ad arcum D F, vt recte demonſtrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum eſſe in ſegmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum inſiſtere ſegmento, ſeu arcui. Id quod in expoſitione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

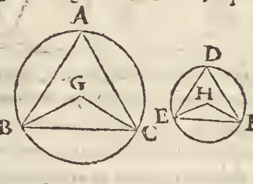
NON obſcure quoque ex hoc theoremate deduci poteſt, ſimilitudinem ſegmentorum in circulis ſimilium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipſis ſegmentis exiſtentes, conſiſtere in eo, quod ſegmenta, ſeu circunferentiæ ſimiles, ad integras circunferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea qualis pars eſt una circunferentia totius ſuæ circunferentiæ, talis quoque ſit alia circunferentia ſimilis totius ſuæ circunferentiæ; veluti in expoſitione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentias conſtituantur æquales B A C, E D F; Quo poſito, ſegmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur ſimilia. Manifeſtum autem eſt, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferentias. Cum enim ob circulorum



æqualitatem, arcus B C, E F, quibus anguli æquales inſiſtunt, ſint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, eſſe quoque æquales. Quare ad totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt: Atque idcirco, quæ pars eſt arcus B A C, totius circũferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D. 26. tertij.

 SINT

Sint ſecundo duo circuli inæquales ABC, DEF, *in quibus anguli ad circunferentias conſtituantur æquales* BAC, EDF. *Quo poſito, dicentur ſegmenta* BAC, EDF, *ex Euclidis ſententia, ſimilia. Dico rurſus arcus* BAC, EDF, *eandem habere proportionem ad integras ſuas circunferentias. Ducantur enim ad centra* G, H, *rectæ* BG, CG, EH, FH. *Quoniam igitur anguli* A, & D, *æquales ponuntur, erunt quoque ad*



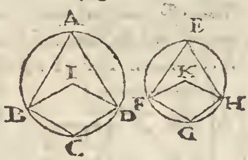
centra anguli G, & H, *æquales,*
20. tertij. *cum hi illorum dupli exiſtant.*
7. quinti. *Quare quatuor recti ad angulum* G, *eandem habebunt rationem, quam ad angulum* H. *Atqui ut quatuor recti ad angulum* G, *ita eſt tota circunferentia* ABCA, *ad arcum* BC: *Et ut quatuor recti ad angulum* H, *ita eſt tota circunferentia* DEFD, *ad arcum* EF, *ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circunferentia*
11. quinti. ABCA, *ad arcum* BC, *ita erit tota circunferentia* DEFD, *ad arcum* EF. *Diuidendo ergo erit, vt arcus* BAC, *ad arcũ* BC, *ita arcus* EDF, *ad arcum* EF. *Et conuertendo rurſus, vt arcus* BC, *ad arcũ* BAC, *ita arcus* EF, *ad arcũ* EDF. *Ac propterea componendo, vt circunferentia tota* ABCA, *ad arcum* BAC, *ita circunferentia tota* DEFD, *ad arcum* EDF. *Et rurſus conuertendo, ut arcus* BAC, *ad totam circunferentiam* ABCA, *ita arcus* EDF, *ad totam circunferentiam* DEFD. *Quocirca quæ pars eſt arcus* BAC, *totius circunferentiæ* ABCA, *eadem pars erit arcus* EDF, *totius circunferentiæ* DEFD.

Constat igitur, recte Euclidem vocaſſe ea circulorum ſegmenta ſimilia, in quibus anguli exiſtentes inter ſe ſunt æquales; quandoquidem huiuſmodi ſegmenta eandem habent proportionem ad circulos ſuos integros.

Manifestvm etiam eſt ex dictis, angulos inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus, ſiue ad centra, ſiue ad circunferentias inſiſtant, æquales eſſe inter ſe. Sint enim in circulis ABCD, EFGH, *quorum centra* I, K, *arcus ſimiles* BCD, FGH, *quibus inſiſtant, ad centra quidem anguli* I, & K, *ad circunferentias autem anguli* A, & E. *Dico tam illos, quam hos eſſe inter ſe æquales. Conſtituantur enim in dictis arcubus anguli*

BCD,

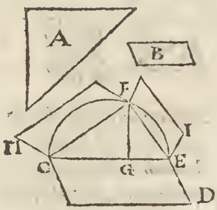
BCD, FGH, *qui æquales erunt, ex defin. ſegmentorum ſimilium; Sunt autem tam anguli* C, *&* A, *quam* G, *&* E, *duobus rectis æquales: Ablatis igitur æqualibus C, & G; reliqui A, & E; ac proinde eorum dupli I, & K, æquales erunt.* 22. tertij.



Vicissim quoq; liquet, arcus, quibus inſiſtunt ſiue ad cẽtra, ſiue ad circunferentias, anguli æquales, ſimiles eſſe. Nã ſi anguli A, *et E, fuerint æquales; erunt & reliqui duorũ rectorũ C, & G, æquales. Igĩ, p definitionẽ, arcus* BCD, FGH, *ſimiles ſunt, quibus dicti anguli* A, *&* E, *inſiſtũt. Quod ſi I, & K, æquales ſint, erũt et eorũ dimidij A, et E, æquales. Quare, vt prius, arcus* BCD, FGH, *ſimiles ſunt.*

Quoniam vero Euclides multa dixit de inuentione linearũ proportionaliũ, nihil vero de ſuperficierũ, vel planorum proportionaliũ inueſtigatione nobis præſcripſit; non abs re me facturum exiſtimo, ſi nonnulla problemata, atque theoremata, quorũ multa circa inuentionẽ ſuperficierũ proportionaliũ uerſantur, ſcitu nõ iniucunda, loco appẽdicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic ſexto libro annectam; quippe quæ ex demonſtratis ab Euclide facili negotio deducuntur; Hinc autem exordium capiemus.

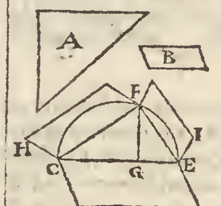
A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum. I.



Sit ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ ſimilis ſit, ſimiliterq́ue poſita rectilineo B, relinquatq́; rectilineum eidem B, *ſimile, & ſimiliter poſitũ. Cõſtituatur rectilineũ* C D, *æquale quidẽ ipſi* A, *ſimile vero ipſi* B, *ſuperq́; vnũ eius latus* CE, *ſemicirculus deſcribatĩ CFE. Deinde ablata parte tertia GE, imperata uidelicet, ex CE, agatĩ* GF, *ad* CE, *ꝑpendicularis, cõnectanturq́; rectæ CF,* EF, *ſuꝑ quas cõſtruanĩ rectilinea* 25. ſexti. 9. ſexti. 13. ſexti.

 FH,

18. ſexti. *F H, F I, ſimilia ſimiliterque poſita ipſi C D. Dico igitur fa-*
31. tertij. *ctum eſſe, quod iubetur. Cum enim angulus C F E, rectus ſit,*
31. ſexti. *quippe qui in ſemicirculo exiſtit; erit rectilineum C D, æqua-le rectilineis H F, F I; atque adeo ſi auferatur rectilineum F I, ſimile ipſi B, ex rectilineo C D, hoc eſt, ex ſibi æquali A, relinquetur rectilineũ H F, ſimile quoque ipſi B. Quod autem rectilineum ablatum F I, ſit tertia pars rectilinei C D, iam oſtendetur. Quoniam eſt ut recta*



4. ſexti. *C G, ad G F, ita recta C F, ad F E,*
8. ſexti. *eo quod triangula, C G F, C F E, ſint ſimilia: Habet autem C G, ad G E, proportionem duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea quod proportionales ſint tres rectæ C G, G F, G E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectilineum H F, ad rectilineum F I,*
19. vel 20. *proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum*
ſexti. *homologorum C F, F E; Erit vt recta C G, ad G E, ita rectilineum H F, ad rectilineum F I; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ ſunt. Componendo igitur erit, ut C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, F I, ſimul, hoc eſt, rectilineum C D, quod eſt illis æquale, ad rectilineum F I. Eſt autem C E, ipſius G E, tripla, per conſtructionem; Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I. Ac propterea hoc illius tertia pars exiſtet. Quod eſt propoſitum.*

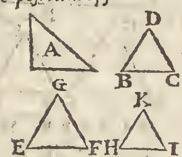
QVOD *ſi pars imperata, nempe tertia, ſimpliciter ſit auferenda, fiet id breuiſſime, hac arte. Rectilineum datum A,*
45. primi *reuocetur ad parallelogrammum B C, ſibi æquale; & ex latere B D, auferatur D E, tertia pars imperata, & per E, agatur ipſi C D, parallela E F. Dico F C,*



tertiam eſſe partem ipſius B C, *hoc eſt, rectilinei dati A. Cum*
1. ſexti. *enim ſit vt D E, ad* D B, *ita* E C, *ad* C B: *ſit autem per conſtructionem* D E, *ipſius* D B, *pars tertia; erit &* E C, *ipſius* C B, *tertia pars. Quod eſt propoſitum.*

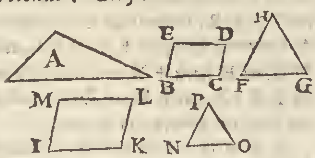
II. **DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.**

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniẽdum ſit tertium proportionale. Conſtituatur ipſi A, rectilineum æquale EFG, ſimile vero ſimiliterque poſitum ipſi BCD. 25. ſexti.
Deinde lateribus homologis EF, BC, inueniatur tertia linea proportionalis 11. ſexti.
HI, ſuper quam conſtituatur rectilineũ HIK, ſimile ſimiliterque poſitum ipſis 18. ſexti.
EFG, BCD. Dico HIK, eſſe tertium proportionale. Cum enim proportionales ſint rectæ EF, BC, HI, erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis deſcripta (cum ſint ſimilia, ſimiliterque poſita) 22. ſexti.
proportionalia. Cum ergo EFG, per conſtructionem, æquale ſit ipſi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia.



TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire. III.

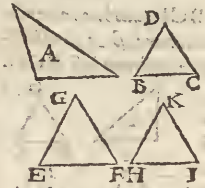
TRIA rectilinea data ſint A, BCDE, FGH, quibus quartum ſit inueniendum proportionale. Conſtruatur rectilineum 25. ſexti.
IKLM, æquale quidem ipſi A, ſimile vero ſimiliterq; poſitum ipſi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, inuenta quarta proportionali 12. ſexti.
NO, conſtituatur ſuper NO, rectilineum NOP, ipſi FGH, 18. ſexti.
ſimile ſimiliterque poſitum. Dico NOP, rectilineum eſſe quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, ſint proportionales, erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita ab ipſis deſcripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. 22. ſexti.
Cum igitur IL, conſtructum ſit æquale ipſi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia.



DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire. IIII.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniendum eſt proportionale. Conſtituatur rectilineum EFG, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterque poſitum ipſi BCD. 25. ſexti.
Duabus deinde rectis EF, BC, inuenta media proportionali HI, 13. ſexti.
conſtruatur ſuper HI, rectilineum HIK ſimile ſimiliterq; poſi- 18. ſexti.

 tum



tum ipſis EFG, BCD. *Dico* H I K, *medium eſſe proportionale quæſitum. Cum enim proportionales ſint tres re*
22. *ſexti.* *ctæ* E F, H I, *B C, erunt quoque recti linea ab ipſis deſcripta* E F G, HIK, BCD, *proportionalia, cum ſint ſimilia ſimiliterque poſita, &c.*

*A*LITER. *Sit rurſus inter rectilinea A, & B, perquirendum mediũ proportionale.*



45. *primi* *Conſtituatur ipſi A, æquale parallelogrã mũ quodcunque* CDEF; *Ipſi vero* B, *æquale pa-*
25. *ſexti.* *rallelogrammũ* EGHI, *ſimile uero ſimiliterque poſitum ipſi* C D E F: *Connectanturque hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut* D E, E I, *efficiant unam lineam, ac propterea, per ea, quæ ad* 15. *propos.* 1. *lib. demonſtrauimus, una quoque linea componatur ex* F E, E G; *perficiaturque totum parallelogrammum KL. Dico vtrumlibet* E K, *vel E I, medium eſſe proportionale inter* D F, G I, *hoc eſt, inter* A, *&* B. *Cum enim ſimilia ſint, ſimiliterque poſita* D F, *G I, erit vt* DE, *ad* EF, *ita* E I, *ad* E G. *Permutando ergo vt*
1. *ſexti.* D E, *ad* E I, *ita* F E, *ad* E G. *Vt autem* DE, *ad* E I, *ita* D F, *ad* E K; *& ut* F E, *ad* E G, *ita* E K, *ad* G I. *Igitur vt* D F, *ad* E K, *ita* E K, *ad* G I, *&c.*

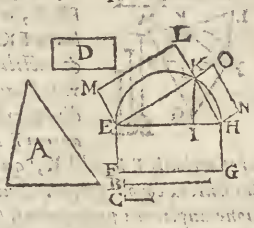
*Q*VOD *etiam in hunc modum confirmari poteſt. Cum* DF, G I, *ſimilia ſint, ſimiliterque poſita, conſiſtent ea circa*
26. *ſexti.* *eandem diametrum. Quare complementa* E K, *E L, æqualia erunt. Vt autem* D F, *ad* E K, *ita eſt E L, ad G I, eo quod*
1. *ſexti.* *vtraque proportio eadem ſit proportioni* D E, *ad* E I. *Igitur erit, vt* D F, *ad* E K, *ita* E K, *ad G I.*

V. DATO rectilineo duo rectilinea æqualia cõſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantque inter ſe proportionem propoſitam quamcunque.

*S*IT *datum rectilineũ A, dataq́; proportio rectæ* B, *ad C, oporteatq; conſtituere duo rectilinea, quæ ipſi* A, *æqualia ſint, habeantq́; proportionem, quam* B, *&* C; *ac ſimilia ſimiliterque poſita ſint rectilineo cuiuis* D. *Conſtituatur rectilineum* EFGH,
25. *ſexti.* *æquale ipſi* A, *& ſimile ſimiliterque poſitum ipſi* D. *Diuiſo*

deinde

deinde latere eius E H, *in I, ſecundum proportionem* B, *ad* C. (*quod facile fiet, ſi conficiatur vna linea ex* B, *&* C. *Nam tunc ſimiliter ſecanda erit* E H, *&c.*) *deſcribatur circa* E H, *ſemicir* 10. *ſexti.*
culus E K H, *& ex I, ducatur ad* E H, *perpendicularis I K, connectanturq; recta* E K, H K. *Deſcribantur iam ex* E K, K H, *rectilinea* E K L M, K H N O, *ipſi* E G, *vel ipſi* D, *ſimilia ſi-* 18. *ſexti.*
militerq; poſita; quæ dico æqualia etiã eſſe ipſi E G, *ſeu ipſi A; habereque proportionem datam* B, *ad* C. *Cum enim angulus* E K H, *in ſemicirculo exiſtens* 31. *tertij.*
rectus ſit, erunt rectilinea E L, H O, *æqualia rectilineo* E G, *cũ* 31. *ſexti.*
ſint ſimilia inter ſe, ſimiliterq; deſcripta. Quoniam uero eſt, vt



E I, *ad I K, ita* E K, *ad K H, cum triangula* E I K, E K H, *ſimi-* 4. *ſexti.*
lia ſint; Eſt autẽ E I, *ad I H, in proportione duplicata proportionis* E I, *ad I K; quod tres* E I, I K, I H, *ſint, ex corollario propoſ. 8. lib. huius, proportionales: Item* E L, *ad H O, in proportio-*
ne duplicata eius, quam habet latus E K, *ad latus homologum* 20. *ſexti.*
K H; *erit vt* E I, *ad I H, hoc eſt, ut B, ad* C, *ita* E L, *ad HO* *Dato ergo rectilineo* A, *exhibuimus duo æqualia* E L, H O, *quæ ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita dato rectilineo* D, *habentque proportionem inter ſe datam* B, *ad* C.

VI.

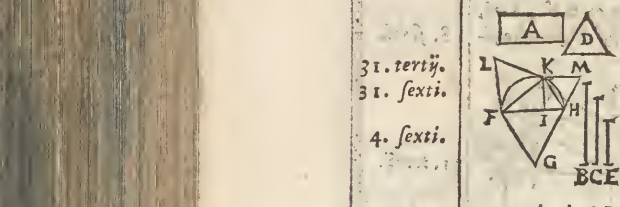
DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam.

DETVR *rectilineum A, & proportio rectæ* B, *ad rectam C; oporteatque conſtituere duo rectilinea ipſi* A, *æqualia, & ſimilia ipſi* D, *ꝓpoſito, ſimiliterq; poſita, quorũ latera homologa ꝓportionẽ habeãt, quã* B, *ad* C. *Inuẽta ipſis* B, C, *tertia ꝓportionali* E, *fiat rectilineũ* FGH, *æquale ipſi* A, *& ſimile ſimiliterq; poſitũ ipſi* D. *Diuiſoq; latere* FH, *in I, ſẽm ꝓportionẽ* B, *ad* E; *deſcribatꝰ circa* FH, *ſemicirculus* FKH; *et ex I, ducatꝰ ad* FH, *perpẽdicularis*



 IK,

IK, connectanturque rectæ F K, H K. Deſcribantur iam ex F K, H K, rectilinea FKL, HKM, ipſi F G H, vel ipſi D, *ſimilia, ſimiliterque poſita.* Dico *hæc rectilinea æqualia eſſe ipſi FGH, vel ipſi A, eorumque latera homologa F K, H K, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. Cum enim angulus FK H, in ſemicirculo rectus ſit, erunt rectilinea FK L, H K M, rectilineo FGH, idemq;*

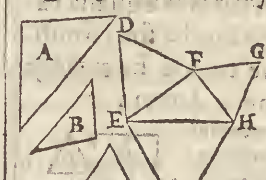


31. tertij.
31. ſexti. *& rectilineo A, æqualia. Quoniã vero eſt,*
4. ſexti. *vt F I, ad I K, ita FK, ad HK, ob ſimilitudinem triangulorum F I K, F K H: Eſt autem F I, ad I H, in proportione duplicata proportionis F I, ad I K, (quod tres F I, I K, I H, proportionales ſint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) Ac propterea in proportione duplicata proportionis laterũ homologorũ F K, H K. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex cõſtructione,) in duplicata eſt proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C; quandoquidem ipſarum duplicatæ proportiones F I, ad I H, & B, ad E, æquales ſunt.*

VII. DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum cuiuis rectilineo dato.

DVO *rectilinea data ſint A, & B, quibus æquale ſit conſtruendũ, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi* C. *Fiat ipſi A, æquale* DEF, *ſimile autẽ ſimiliterque poſitũ ipſi* C. *Itẽ ipſi B, æquale conſtituatur G F H, ſimile vero eidem* C, *ſimiliterq; poſitũ. Deinde rectilinea* DEF, GFH, *ita inter ſe connectantur, vt latera eorum homologa E F, F H, conſtituant angulum E F H, rectũ, cui ſubtendatur recta EH, ex qua*

25. ſexti.



8. ſexti. *deſcribatur rectilineum IHE, ſimile ſimiliterque poſitum ipſis* DEF, *GFH, hoc eſt, ipſi* C. *Perſpicuum autem eſt EHI, æquale eſſe duobus* D E F, *GFH; atque idcirco duobus A, & B.*
31. ſexti.

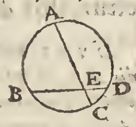
BREVIVS. *Cõſtituatur parallelogrammũ æquale duobus*

bus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propoſ. 45. lib. 1. docuimus. Si enim huic parallelogrammo conſtruxerimus æquale rectilineum E H I, quod ſimile ſit, ſimiliterq́; poſitum alteri 25. ſexti. *dato rectilineo C; conſtitutum erit rectilineum E H I, æquale duob⁹ rectilineis A, B, & ſimile, ſimiliterq́; poſitũ rectilineo C.*

VIII.

Si in circulo duæ rectæ lineę ſe ſe mutuo ſecuerint: Erunt ſegmenta unius ſegmentis alterius reciproca.

In circulo A B C D, ſe mutuo ſecent rectæ A C, BD, in E. Dico ſegmenta A E, E C, eſſe reciproca ſegmẽtis B E, E D: Hoc eſt, eſſe vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel ut A E, ad E D, ita B E, ad E C. Cum enim rectangulum ſub A E, E C,

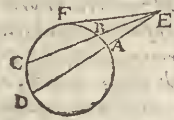


comprehenſum æquale ſit rectangulo ſub BE, E D, contento; 35. tertij. *erunt latera circa æquales angulos reciproca.* 14. ſexti. *Quod eſt propoſitum.*

IX.

Si extra circulum ſumatur punctũ aliquod, ab eoque in circulum cadãt duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hęc media proportionalis inter quamlibet rectam, quę circulum ſecet & eius ſegmentum exterius.

Extra circulum A B C D, ſumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, E D, ſecantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, eſſe reciprocas rectis E D, E A: Hoc eſt, eſſe, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel ut E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F, erit rectangulum ſub EC,

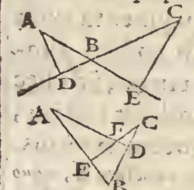


E B, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum ſub ED, 36. tertij. *E A, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula ſub EC, E B, & ſub E D, E A, æqualia erunt: Ac propterea latera eorũ circa angulos æquales reciproca.* 14. ſexti. *Quoniã autẽ quadrato rectæ EF, æquale eſt rectangulũ ſub E C, E B: Item re-* 36. tertij. *ctangulũ ſub ED, E A, erunt tres rectæ E C, E F, E B. Itemq́; tres*

tres E D, E F, E A, proportionales, atque adeo E F; media proportionalis inter quamlibet lineam quæ circulum ſecet, & ſegmentum eius exterius. Quod eſt propoſitum.

X. SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, & a duobus eorum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum una inter terminũ, & ſectionẽ, altera uero inter eundẽ terminũ, & ſuã perpendicularem interijcitur, alijs duab⁹ eodẽ modo incluſis reciproce.

DVAE rectæ A B, C B, ſe mutuo ſecent in B, & ex terminis A, C, ad ipſas demittantur perpendiculares, A D, quidem ad C B, at uero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas ultra B, ſi angulus A B C, fuerit obtuſus; in ipſas vero introrſum, ſi idem angulus acutus fuerit, ut figuræ indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & ſectionem B; poſterior verò inter ſectionem B, & perpendicularẽ ſuam C E, quæ nimirum ad ipſam A B, ducitur) reciprocas eſſe duabus C B, B D, (quæ inter ſimiles terminos includuntur) hoc eſt, eſſe vt A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cum enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales ſint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. (Nã A D B, C E B, recti ſunt; & A B D, C B E, ad verticem in priori figura, in poſteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula. Quare



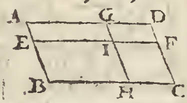
4. *ſexti.* *erit vt A B, ad B D, ita C B, ad B E: Ac propterea permutando quoq;, vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod eſt propoſitum.*

PORRO eadem ratione ſegmenta perpendicularium A D, C E, in poſteriori figura ſe mutuo ſecantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula A F E, C F D, ſint æquiangula; erit
4. *ſexti.* *vt A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoque, vt A F, ad C F, ita F E, ad F D.*

XI. IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuo ſecantes, diuidunt parallelogrammum

grammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

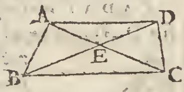
In parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, GH, lateribus A D, D C, parallelæ ſe mutuo ſecent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, B I, I C, eſſe proportionalia. Cũ enim ſit, vt E I, ad I F, ita EG, 1. *ſexti.* *ad G F: Item vt E I, ad I F, ita B I, ad I C; Erit quoque ut EG, ad G F, ita B I, ad I C, quod eſt propoſitum.* 11. *quinti.*



XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris ſe mutuo ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

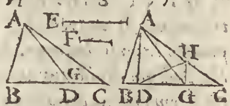
DIVIDANT diametri A C, BD, ſe mutuo ſecantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, CEB, eſſe proportionalia. Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad 1. *ſexti.* *triangulum C E D; & triangulum A E B, ad triangulum CEB. Quare vt triangulum A E D, ad triangulum CED; ita triangulum A E B, ad triangulum CEB. Eademq; ratione oſtendes eſſe ut B E A, ad D E A, ita BEC, ad DEC, cum vtraq; proportio eadem ſit proportioni B E, ad E D. Conſtat ergo propoſitum.*



XIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.

SIT triangulum A B C, oporteatque a dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum ſecet in duo ſegmẽta ſecundum proportionem datam E, *ad* F. *Diuidatur* BC *in* G, *ſecundum proportionẽ* E, *ad* F, *cadatq; primo punctum* G, *in datum punctum D, ducaturq; recta D A. Quoniam igitur eſt vt* B D, *ad* DC, *ita triangulum* B D A, *ad triangulum* 1. *ſexti.* CDA, *ſecabit recta* D A, *triangulum datum ſecundum proportionem datam* BG, *ad* GC, *hoc eſt,* E, *ad* F.



CADAT ſecundo punctum G, inter C, & D. Ducatur ergo recta D A, *cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq;*

recta

recta D H. *Dico rectam* D H, *ſecare triangulum datum ſe-cundum proportionem datam, hoc eſt, eſſe trapezium* BDHA, *ad triangulum* C D H, *vt* E, *ad* F, *ſeu vt* BG, *ad* GC. *Ducta enim recta* G A, *erunt triãgula* HGA, G H D, *æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin GH, & inter eaſdẽ parallelas G H, D A. Addito igitur communi triangulo CGH, fiet æqualia triangula CGA, CDH: Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH. Diuidendo igitur, erit vt triangulum* B G A, *ad triangulum C G A, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH. Eſt autem B G A, ad C G A, vt BG, ad G C. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulũ CDH, vt* B G, *ad* GE, *hoc eſt, ut* E, *ad* F. *Quod eſt propoſitum.*



37. primi

7. quinti.

17. quinti.

1. ſexti.

C A D A T *tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq́; recta D A, cui rurſus per G, agatur parallela G H. Dico igitur, rectam ductã* DH, *ſecare triangulum* ABC, *ſecundum proportionem datam* E, *ad* F, *hoc eſt, eſſe triãgulum* BDH, *ad trapezium* CDHA, *ut E, ad F. Ducta enim recta GA, erunt, vt prius triangula HGA, GHD, æqualia; additoq́; communi* B G H, *æqualia fient* B G A, B D H. *Quare erit* A B C, *ad* B G A, *vt ad* B D H. *Diuidendo ergo erit vt CGA, ad B G A, ita trapezium* CDHA, *ad triangulum* BDH; *& conuertendo, vt* BGA, *ad* CGA, *ita* BDH, *ad trapezium* C D H A. *Eſt autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* G C. *Igitur & B D H, ad trapezium* C D H A, *erit ut B G, ad G C, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum.*



37. primi

7. quinti.

17. quinti.

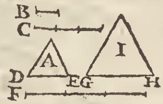
1. ſexti.

H I N C *perſpicuum eſt, quonam modo imperata pars ex triangulo ſit auferenda per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto ductam diuidatur triangulum ſecundum proportionẽ multiplicem, cuius denominator vnitate minor ſit denominatore partis imperatæ, (vt ſecundum proportionem triplam, ſi quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifeſtũ eſt. Habebit enim tunc totum triangulum ad ſegmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis eſt denominatori partis; cum priori denominatori proportionis multiplicis addatur unitas, quæ ante deerat.*

D A T O

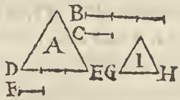
DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius, uel minus, ſecundum proportionem datam. XIIII.

SIT rectilineum datum A, cui ſimile ſimiliterque poſitũ ſit deſcribendum maius, ſecundum proportionem datam B, *ad C. Tribus rectis* B, *C, &* DE, *(ſit autem* DE, *vnum latus recti*
linei dati quodcunque) inueniatur quar- 12. *ſexti.*
ta proportionalis F. D*einde duabus* DE,
& F, *inueniatur media proportionalis* 13. *ſexti.*
G H, *ſuper quam ipſi A, deſcribatur re-* 18. *ſexti.*



ctilineum I, ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico I, *maius eſſe quã A, ſecundum proportionem datam* B, *ad* C. *Cum enim proportionales ſint tres rectæ* D E, G H, *&* F, *erit per coroll. propos.* 19. *vel* 20. *libri huius, ut* D E, *prima ad* F, *tertiam, hoc eſt, per conſtructionem* B, *ad C, ita rectilineum A, ſuper primam ad rectilineum* I, *ſuper ſecundã, illi ſimile ſimiliterq; poſitum.*

NON *ſecus dato rectilineo A, minus rectilineum* I, *deſcribemus, illi ſimile ſimiliterque poſitũ, ſecundum proportionem datam* B, *ad C. Ceu in hac figura factum eſſe cernis. Eadem enim prorſus eſt conſtructio, atque demonſtratio.*



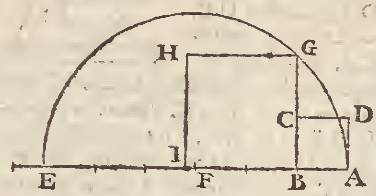
FACILE *igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineũ duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, etc. Atque aliud conſtituemus, quod ſit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. ſeruata nihilominus ſemper eadem rectilineorum ſimilitudine, quemadmodum & quadratorum eadem remanet ſimilitudo. Si namq; proportio* B, *ad C, ſumatur ut* 1. *ad* 2. *vel* 1. *ad* 3. *vel* 1. *ad* 4. *&c. Item vt* 2. *ad* 1. *vel* 3. *ad* 1. *vel* 4. *ad* 1. *&c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum ſimile ſimiliterq; deſcriptũ, quod propoſiti rectilinei duplum exiſtet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.*

NON *videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipſe facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, ſeu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim conſtruemus quoq; rectilineum ſimile, ſimililerque deſcriptum*

cuicun-

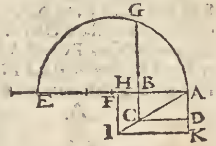
cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, ſecundum datam proportionem quamcunque. Tametſi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, ſed eam ſimpliciter proponit; non multum tamen eius demonſtratio a præcedenti differt, vt mox oſtendemus.

Sɪᴛ igitur quadratum A B C D, quincuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, ſumantur quinque partes ipſi A B, æquales, a puncto B, incipiendo, vſque ad E, vt ſit B E, quincupla ipſius A B. Diuiſa deĩde tota AE, bifariã in F, deſcribatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, ſemicirculus AGE, producaturque latus B C, ad circunferentiam vſque in G. Dico quadratum B G H I, ex BG, deſcriptum, quincuplum eſſe quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter E B, BA. Igitur erit ut E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum ſecundæ, ad A C, quadratum tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Eſt autem E B, per conſtructionem, ipſius AB, quincupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quincuplum erit. Quod eſt propoſitum. Quod ſi recta B E, ſumatur ſexcupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, ſexcuplum: Si autem B E, fuerit tertia pars ipſius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique in quacunque proportione ſumatur BE, ad A B, eandẽ habebit quadratum B H, ad quadratũ AC.



Sɪᴛ rurſus rectangulum ABCD, cui inueniendum ſit ſimile ſimiliterque poſitum, quod duplum ſit ipſius. Ex latere A B, producto ſumatur B E, dupla ipſius A B. Diuiſa deinde tota A E, bifariã in F; & ex F, deſcripto ſemicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, unum latus rectanguli quaſiti: Quare ſi abſcindatur AH, æqualis ipſi B G, & p H, agatur ipſi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protracta in I, perficiaturque parallelogrammum H K, erit H K, ipſi B D, 24. ſexti.
ſimile ſimiliterque poſitum; quod etiam aio duplum eſſe ipſius B D.

B D. *Cum enim proportionales ſint tres rectæ* E B, B G, B A, *ex corollario propoſ.* 13. *huius lib. Erit vt prius, ſicut* E B, *prima ad* B A, *tertiam, ita rectangulũ* H K, *ſupra* A H, *ſecundã (ſumpta enim fuit* A H, *ipſi* B G, *ſecundæ æqualis) ad rectangulum* B D, *ſupra tertiam* A B, *quod eſt ſimile ſimiliterq́ue deſcriptum.*



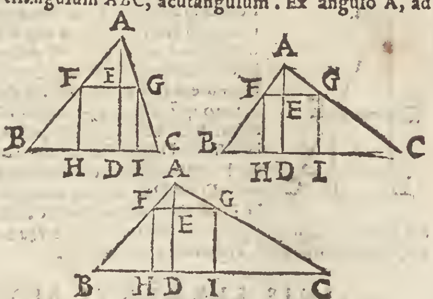
EODEM *modo, ſi ſupra* A B, *conſtitutum fuerit quod cunque rectilineum, erit quod ex* B G, *illi ſimile, ſimiliterq́ue poſitum deſcribitur, ipſius duplum. Atque in hunc modum ſemper eam proportionem habebit rectilineum ex* B G, *ad rectilineum ſimile ex* A B, *quam habere ponetur recta* E B, *ad rectã* B A, *ex conſtructione.*

PERSPICVVM *autem eſt, hanc operationem vna cũ eius demonſtratione a noſtra antea tradita nõ differre, niſi quod hæc ſimul tradat inuentionem mediæ proportionalis. Hanc enim ob cauſam Albertus coniungit in rectum, & continuũ lineas* E B, B A, *quæ proportionem habẽt datam, vt ſtatim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere.

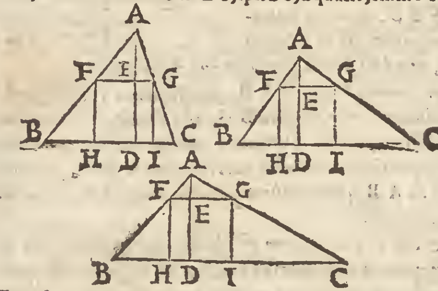
SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo A, ad BC, perpẽdicularis demittatur AD, quæ in E, ita ſecetur, per ea, quæ in Scholio ꝓpoſ. 10 huius libri docuimus, ut eadẽ ſit ꝓportio AE, ad ED, quę AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipſi BC, parallela. Poſtremo ex F, & G, ipſi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inſcriptum, eſſe quadratũ. Cum enim FEG, ipſi C, ſit parallela, erit ut BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex ſcho



lio

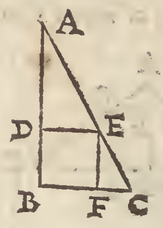
lio propos. 4.huius lib.& componendo, ut B C,ad D C, ita FG, ad E G.Sed ut D C,ad AD,ita eſt EG,ad A E; & per coroll. ꝓpos.4.huius lib.triangula ADC, A EG,ſint ſimilia. Igitur erit ex æquo, ut B C,ad AD,ita FG,ad A E. Quia uero per conſtructionem eſt, ut A D,ad BC,ita A E,ad ED; erit rurſus ex æquo, ut BC, ad BC,ita F G,ad E D. Eſt autem BC,ipſi BC,æqualis,immo eadem : Aequalis igit eſt & F G,ipſi ED. Quare cũ FG,ipſi HI;& ED, ipſis F H, G I, æquales exiſtat; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F,æqualia inter ſe.

34. primi



29. primi Et quia anguli E D H,F H D, duobus rectis æquales ſunt : Eſt autẽ E DH, per conſtructionem rectus: erit & F H D,rectus. Quocirca, per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2.demonſtrauimus, & reliqui anguli H FG, FGI,GIH, recti ſunt; Ac propterea F I, quadratũ eſt. quod eſt propoſitum.

Non ſecus idẽ problema abſoluemus,ſi datum triangulum fuerit rectangulum uel obtusangulum, dummodo ex angulo recto,uel obtuſo perpendicularem demittamus, ceu in poſterioribus duobus triangulis apparet.



Qvod ſi in triangulo rectangulo quadratũ deſcribere libeat,ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulũ rectũ nitantur diuidemus perpẽdicularẽ AB,in D, ita ut eadẽ ſit proportio A D,ad DB, quæ AB,ad BC,& per D,quidem ipſi B C,parallelã ducemus DE; per E,uero ipſi AB,aliã parallelã EF. Quoniã igitur

4. ſexti. eſt,ut B C, ad AB,ita DE,ad AD; quod triãgula ABC, ADE,ſimilia ſint,per coroll. ꝓpoſ.4.huius lib. Eſt autẽ per cõſtructionẽ,ut AB,ad BC, ita AD,ad DB. Erit ex æquo,ut BC,ad BC, ita D E,ad DB : Eſt autem BC,ſibi ipſi æqualis,immo eadem. Aequalis igitur eſt & D E,ipſi DB. Quare ut prius,DEFB, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLIDI

EVCLIDIS ELEMENTVM VII.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundum quã unumquodque eorum, quæ ſunt, unum dicitur.

HACTENVS *egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana uerſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearũ requiratur, idque adeo, ut abſque eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque uſum, neque exprimi queant, neque intelligi: Nam pleraque laterũ ſunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel certe, ſi non ſunt Irrationales, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles, atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt.* Et *quia earundem linearum explicatio, ac intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, ut abſque his nullo modo cognoſcantur, oportuit etiam numerorũ explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioque conſtaret, lineis*

anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectioneſque, quantum ea rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur. Incipiens igitur more ſuo a principijs, definit initio unitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum eſſe dicitur: Nam ſecundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere ſolemus. Cæterum unitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex unitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus compoſita, manifeſtum eſt, numerũ quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes; Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipso numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nempe vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum quælibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

Ex his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos una eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurimæ illarum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, ut clariſſime lib. 10. oſtendetur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON

NON eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc ſolum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum, cuius pars eſt, metitur; ut 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit ſeptima pars numeri 42. & in reliquis eodẽ modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem nõ metitur, non partem, ſed partes appellari: cuiuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cũ eum non metiatur, niſi per ſuas vnitates, pars dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum qualibet decimaoctaua pars eſt huius numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum, nõ autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin ſuperuacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum menſura utrumque eorum metitur, & eum ſcilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita ut ſi communis duorum numerorum menſura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes ſunt 6. huius numeri 10. nam communis eorum menſura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas eiuſdem numeri 10. cum unitas, eorum cõ-

munis menſura, illum metiatur per 6. hunc uero per 10. Idem iudicium habeto & in reliquis.

QVOD ſi roges, cur Euclides hoc in loco non ſolum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars eſt, verum etiam illum, qui partes: non autem idipſum quinto lib. in magnitudinibus præſtiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; ſed tantum eam, quæ maiorem metitur, partem. Reſpondemus, huius rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars eſt, aut partes, ceu propos. 4. huius lib. oſtendetur; pars quidem, cum ipſum metitur, partes uero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter ſe res habet. Non enim, propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus, neceſſario minor aut pars, aut partes eſt maioris: cum eæ perſæpe ſint incommenſurabiles, ut aperte liber decimus demonſtrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, ſi illum non metiatur. Recte igitur Euclides in quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX uero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille ſolum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo ut numerus maior, cuius minor eſt pars, ſit uiciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt, &c. Si vero maiorem minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex: Si enim maior minoris multiplex eſſet, metiretur minor maiorem, per hãc definitionem. Et viciſſim, ſi maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem nõ metietur. Nam ſi metiretur minor maiorem, eſſet per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes æquales, cum eorum dimidia ſint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR uero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt a pari.

Omnes hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. uel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perſpicue colligi poteſt, vnitatem in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi poſſet. Nam huius imparis 11. dimidia pars eſſent quinque vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parē.

Qvia numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. Metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pari-

ter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

I X.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM ſi recte duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuum erit, fieri poſſe, ut unus idemque numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar uocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum; ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neque pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſque, vt conſtat. Itaque tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maxime diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis

clidis inſtituto, vt perſpicuum eſt & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponũt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. ubi manifeſte omnem numerũ parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parẽ appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonſtratque omnes numeros a binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, eſſe pariter impares tantum, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli ſunt, nec dimidios habẽt impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros, aliosque ſimiles, vere eſſe, ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici recte pariter impares, quanquam nec ſolum pariter pares, nec ſolum pariter impares illi ſint. Sed hæc planius in lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparẽ. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus primus; quales ſunt omnes iſti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tamquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15. 8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis, illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem uero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrunque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licet impropriè, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas unitatem, & numerum quemuis metitur.

XIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quẽ numerus quiſpiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes

nes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, licet non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorũ & ſe ipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus nocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. ſexies fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoque contra numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerũ 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus

ptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. uel e contrario. Et ſic de reliquis.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui uero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

Omnis numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, quod ipſum contineant, non ſecus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, ut latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latu diſpoſitæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum uero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.



Caetervm cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides ſolum definit planum quadrangularem

rem rect angulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorũ mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quod omni ex parte quadrato geometrico, & figuræ altera parte longiori, ſimiles ſint, et æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatemue ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c: quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quoad ambitum: tamen ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuũ eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

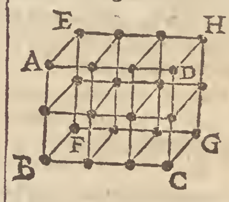
POTEST *autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.*

QVIA *vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quod quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum; Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.*

XVII.

CVM uero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum diſpoſitæ referunt figurã quidam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primum multiplicetur numerus 2. in 3. efficietur numerus 6. baſis ſolidi numeri longa tres unitates, & lata duas: Et ſi hæc baſis in 4.



multiplicetur, hoc eſt, accipiatur quater, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens quatuor vnitatum. At ſi numerus 2. in 4. multiplicetur, habebitur baſis 8. vnitatum, quæ multiplicata in 3. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 3. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit A B C D, duodecim vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B A, latitudo, tres complectitur; ſuperponetur ei altera baſis ſimilis, & æqualis E F G H, ut totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B F, vnitates duas. Similiter, ſi baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor, & latitudo B F, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ duæ baſes ſimiles, & æquales, fietque totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem B A, habens trium vnitatum. Si denique baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres continet, & latitudo B F, duas, ſuperponentur illi tres aliæ baſes ſimiles, & æquales, conſtabitque totus numerus ſolidus unitatibus 24. quarum quatuor, altitudinem dabunt B C. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cũ ex his mutuo multiplicatis ꝑducat̃. Eodemq; modo de alijs numeris ſolidis iudicandũ erit.

DENIQVE

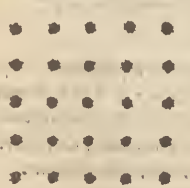
DENIQVE & vnitas aliquando ſolidus appellabitur numerus, & ſi non proprie, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earũ multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, continetur que ſub tribus numeris, omiſſis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datam, quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium pro creatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius unitates in formã planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in omnibus lateribus habens quinque vnitates ideoque æqualiter æqualis erit.



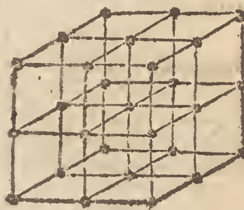
ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, uel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati a Geometris, radix uero ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

XIX.

XIX.

CVBVS uero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longũ, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cũ ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; uel eadem pars, uel eædem

partes;

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, uel eaſdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Definitio etenim uulgata Euclidis, quã puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſub multiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis: At uero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente; In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, nec æque multiplex eſt, nec eadem pars, nec eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 3. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nempe triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper

inſuper eandem partem, nempe ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In ultimo tandem primus ſecundum, & tertius quartum, bis, et præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, nõ ſit æque multiplex, vel eadem pars, uel eædem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE *igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus cõferuntur, quod primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, quod primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, uel eaſdem partes: Et contra; ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur; dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.*

DEFINIT *autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, ut proportionales numeri dicantur.*

EX *hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra, eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem; Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idẽ eandẽ habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædẽ partes; Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus æqualiũ ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædẽ partes:*

Vel

Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque inſuper eorum partem, uel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS *quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, uel eadem pars, uel eædem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, uel partes: Item quia idē numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes; Vel certe illos æqualiter continet. eandemque inſuper illorum partem, uel partes, ſecundum hanc eandem definitionem; manifeſtum eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.*

PARI *ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionē, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hæc definitio intelligatur.*

XXI.

SIMILES plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

NON *neceſſe eſt, ut planus numerus plano numero ſit ſimilis, quælibet duo illius latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua duo latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundū ſuas vnitates in formam planā redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. ſimiles ſunt, quoniā illius latera 6. 4. proportionalia ſunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. uel 12. 2.*

EODEM *modo, vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, nō requi-*

ritur, ut quævis tria unius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet lateribus alterius; ſed ſufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolidi 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. uel 16. 4. 3.

ITAQVE poſſunt duo numeri plani, uel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles, ut dictũ eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8 nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in poſteriori.

XXII.

PERFECTVS numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales ſunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ ſimul ſumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum ſumma conſtituit ipſum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam ſummam collectas componere numerum 496. perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua uia, ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonſtrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.

QVOD ſi partes omnes aliquotæ alicuius numeri ſimul acceptæ maiores ſint ipſo numero; dici ſolet numerus ille, Abũdans: ſi uero minores, Diminutus.

HIS

His definitionibus ab Euclide propoſitis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliſque ſcriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim eæ, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti uidentur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus ſecundum 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita eſſe, hac ratione fiet perſpicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipſum 12. toties compoſitus, quoties eſt unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia uero vt propos. 16 huius lib. oſtendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifeſtum relinquitur eundem numerum 12. procreari, ſi numerus 4. multiplicet numerum 3.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum eſt habitudo quædam unius numeri ad alterum, ſecundum quod illius eſt multiplex, uel pars, partesue; uel certe illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, uel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex eſt, nempe quincuplus, dicetur

hæc comparatio, habitudoue Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus ; 0. cum numero 60 confertur, ſecundum quod illius tertia pars eſt ; & ſic de reliquis.

QVAE cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt ; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes, vt ſupra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores ſumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quā habet ad ſecundum: Et ſemper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, ut ad magnitudines pertinet, copioſe explicata fuit in quinto lib. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertiũ, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus uerbis a nobis demonſtratum eſt ad defin 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones uerſantur, demõſtrabuntur quoque in hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, uel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam unitatis.

tis.

tis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille uidelicet, qui ex unius unitatis, uel etiam plurium additione conſurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorũ, uel eiuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex eſt, uel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualiũ numerorum, uel eiuſdem, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, uel æquales, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per uni-

tates

tates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM unitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito unitates, ipſum conſtituit. Quamobrem ipſum metitur per unitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis unitatibus conſtitutum.

VI.

OMNIS numerus ſe ipſum metitur per unitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per unitatē.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A. numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15 numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, unitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B ...
C ....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, unitates,

hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

VT, quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quē metitur, uel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, uel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipſum C.

A.... B...
C............

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos B C, C D; erit tam B C, quam C D, ipſius

A, m lti-

A, multiplex: Diuiſo ergo B C, in partes BE, EC, ipſi A, æquales, & ipſo CD, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

A . . . .

B .... E .... C .... F .... G .... D

XI.

NVMERVS quemcunque numerũ metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR *numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quẽ B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D; erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo CD, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.*

A . . .

B . . . .

C .... E .... D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR *numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quam B D,*

ipſius

ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus D C, uel una pars numeri B C, ipſi A, æqualis, uel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, uel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

A . . .
B .... D . . . C
B .... D C

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus unquã metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

A .... E .. G . B
C ... F .. D
H ——

SINT duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatẽ G B, quæ quidem præcedentẽ numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos; hoc eſt ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter unitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D, & C D, numerũ A E, (quod C D, uel pars ſit ipſius A E, uel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) metie-
11. pron tur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum AB;

A B ; igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem EB, 12. *pron.*
ipſum C F; Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, 11. *pron.*
cum & totum C D, metiatur, metietur quoque reliquum 12. *pron.*
F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G ; metietur etiã
H, ipſum E G : Metiebatur autem & H, totum E B ; Reli- 11. *pron.*
quam igitur unitatem quoque G B, numerus H, metietur, 12. *pron.*
partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros A B, C D, metitur : Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrẽ, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

CONVERTEMVS facile cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi A B, C D, quorũ minor C D, ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum.

A .... E . . G -- B

C . . . . F . . D

Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipſum E G; metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſe ipſum metiatur; metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum : Metitur autem E B, ipſum C F; Igitur & G B, eundem C F, metietur : Atq; adeo cũ & ipſum F D, poſitus ſit metiri; metietur quoque C D, ex C F, F D, compoſitum : At vero C D,

Margin: 11 *pron.* (beside "metietur quoque G B, ipſum E G"); 10. *pron.* (beside "metietur quoque numerum E B"); 11. *pron.* (beside "Metitur autem E B, ipſum C F"); 10. *pron.* (beside "metietur quoque C D")

11. pron. *C D, metitur ipſum A E: Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde cum & ipſum E B, metiatur, vt oſtenſum eſt; metietur & A B, ex vtroque A E, E B, compoſitum. Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.*

A . . . . E . . G --- B
C . . . . F . . D

10. pron.

E O D E M *modo & hoc demonſtrabimus.*

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

N A M *ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem uſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, ut Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.*

E X *his facile dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nūquā reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, ut Euclides demonſtrauit: Si uero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propoſitum metiatur; ut perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, oſtenſum fuit, eundem reliquū G B, vtrunque A B, & C D, metiri.*

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter

inter ſe, maximam eorum cõmunem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri A B,C D,non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B,quoties poteſt, relinquatq; E B, numerum,qui ex C D,ſubtractus relinquat F D,& ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidẽ peruenietur ad numerum, qui præcedentẽ metiatur. Nam ſi ad unitatẽ deueniretur, numeri A B, C D,eſ-

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . F . . D
G - - - - - -

ſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentũ 1.*ſeptimi*
ergo iam ſit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B,nihil relinquat, ſed eam metiatur. Dico F D, eſſe maximam menſuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunq; metiatur,ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum E B; & E B, ipſum C F; metietur quoque
F D, ipſum CF; atq; adeo cũ & ſeipſum metiatur, metie- 11. *pron.*
tur & totũ C D,ex CF,FD,compoſitum. At C D, ipſum 10. *pron.*
AE,metitur; Igitur & FD,eundem A E, metietur. Ac pro 11. *pron.*
pterea cum F D,metiatur quoque ipſum E B; metietur etiã
totum A B, ex utroque A E, E B, compoſitum. Metitur 10. *pron.*
igitur F D, utrunquen umerum A B,C D.

QVOD autem F D,ſit maxima menſura communis illoru,ita probabimus. Si enim fieri poteſt,detur maior menſura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipſum A E; metietur
quoque G, ipſum A E. Igitur & reſiduum E B: At uero 11. 12. &
E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; Igitur 11. *pron.*
& reſiduum F D; maior minorem. Quod eſt abſurdum. 12. *pron.*
Non ergo maior numerus, quã F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D, maxima eſt menſura numerorum A B, C D.

QVOD ſi minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipſe maxima

A . . . . B
C . . . . D

ma amborum mēſura communis, cum & ſe ipſum metiatur. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quod numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorundem communem menſuram. Hoc elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit F D, eſſe maximam menſuram ipſorum A B, C D. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros A B, C D, metiri quoque numerum F D, maximam eorum menſuram cōmunem. Eademq; ratio eſt de cæteris.

SCHOLION.

Ex dictis facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

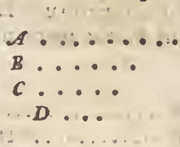
A . . . .
B . . . .
C . . . . .

2. ſeptimi *Si vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.*

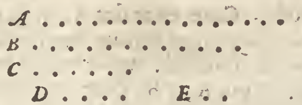
A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . .

Qvod ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; Erunt C, & D, uel inter ſe primi, uel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita ut habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam

ximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autẽ C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti.



Inuenta enim numerorum C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe ſunt compoſiti. Quod eſt propoſitum. 2. *ſeptimi* 11. *pron.*

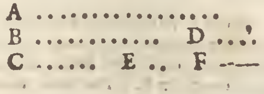


S I M I L I *arte explorabimus, an plures numeri, quam tres ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.*

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

T R I B V S numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum cõmunem menſuram reperire.

D E N T V R tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſurã cõmunem oporteat reperire. Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur 2. *ſeptimi*



quoque

quoque ipſum C; perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si vero D, nō metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti.

A..................
B .... D....
C .... E... F----

Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propos. 2 huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. Sit eorum
2. *ſeptimi* maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura cõmunis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipſos A, & B; me-
11. *pron.* tietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communẽ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mẽſuram. Hoc etiã colligitur ex ultima parte demonſtrationis; Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum

merum E, maximam illorum menſuram communem: Eademque in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter ſe, maxima eorum communis menſura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primo A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet unitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B.

A . . . .
B . . . .

SINT deinde A, & B, nō primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito manifeſtum eſt A, partē eſſe numeri B.

A . . . . . .
B . . . .

SED iam A, non metiatur ipſum B; inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cū ipſum metiatur; erit quoque A D, pars eiuſdem B: ſimiliter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

A . . D . . E . . F
B . . . .
C . .

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter

alterius eadem pars: Et ſimul uterque utriuſque ſimul eadem pars erit; quæ unus unius.

Sɪᴛ numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico utrunque numerum A, & D, ſimul, utriuſque numeri B C, & E F, ſimul eadem eſſe partem; quæ eſt uel A, ipſius B C, uel D, ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, EF, in partes BG, GC; EH, HF,

A . . . . . . D . . . .
B . . . . . G . . . . . . C E . . . . H . . . . F

ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius B C, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodẽ argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in BC, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, uel C, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, ſimul utriuſque B C, & E F, ſimul, quæ eſt A, ipſius B C, uel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

Eᴏᴅᴇᴍ modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

Sɪ vnitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul utraque unitas, uel unitas & numerus ſimul, utriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

Hoc

HOC autem perſpicue in his appoſitis exẽplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A . D . . A . D . . .
B . G . C . E . H . F B . G . C E . . . H . . . F

POSSVMVS etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorũ, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ unus unius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorũ eadẽ pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omniũ numerorum DE, FG, HI, ſimul eandem eſſe partẽ, quæ eſt A, ipſius DE.

A . . . . B . . . C . . .
D . . . . K . . . . E F . . . L . . . G H . . . M . . . I

Diuiſis n. numeris DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partiũ numeri DE, æqualis multitudini partiũ tam numeri FG, quã numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt; ſi illis addãtur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoq; A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erũt A, B, C ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatũ numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cõtinetur. Quamobrẽ eadẽ pars erũt A, B, C, ſimul ipſorũ DE, FG, HI, ſimul, quæ A, ipſius DE.

IDEM ſequitur, ſi loco unius numerorũ A, B, C, ſumatur unitas, uel loco pluriũ, uel etiã omniũ, plures unitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A . B . . C . . . A . B . C .
D . K . E F . . L . . G H . . . M . . . I D . K . E F . L . G H . M . I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

SI ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, ſinguli ſingulorum. Dico & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quam eſt B, ipſius E, & C, ipſius F; erit e contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

A .... B .... C ....
D .... E ... F ..

QVOD ſi loco unius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, uel etiam loco plurium, uel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, ut ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C ...... A .. B .. C ..
D . E .. F ... D . E . F .

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul uterque utriuſque ſimul eædem partes erit, quæ unus unius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus

merus D E, numeri F. Dico utrunque numerum A B, & D E ſimul utriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ A B,
ipſius C, uel D E, ipſius F.

A . . . G . . . B D . . . . H . . . . E
C . . . . F . . . .

Diuiſis in numeris A B D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes eſt numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt A G, numeri C, eadem eſt D H, numeri F; erit uterque A G, D H, ſimul eadem pars utriuſque C, F, ſimul, quæ A G, ipſius C, uel D H, ipſius F. Eadem ratione erit uterque G B, H E, ſimul eadem pars utriuſque C, F, ſimul, quæ G B, ipſius C, uel H E, ipſius F: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, cõtenta, partes eædem numerorum C, F, ſimul, quot partes eædem eſt numerus A B, ipſius C, uel D E, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit uterque numerus A B, D E, ſimul, utriuſque numeri C, F, ſimul, quæ A B, ipſius C, uel D E, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. *5. ſeptimi*

SCHOLION.

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ unus unius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; ut hic perſpicuum eſt.

A . . K . . B   C . . . L . . . D   E . . . . M . . . . F
G . . . .   H . . . .   I . . . .

7. ## THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus A B, eadem pars numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F: Dico reliquum E B, eandem eſſe partem reliqui F D, quæ eſt totus A B, totius C D. Ponatur enim E B, numeri G C, eadem pars, quæ eſt A E, ipſius C F, uel totus A B, totius C D.

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . F . . . . D

Quia igitur A E, eadem eſt pars ipſius C F, quæ E B, ipſius G C; erit uterque A E, E B, ſimul eadem pars utriuſq; ſimul C F, G C, quę A E, ipſius C F, hoc eſt, quæ totus A B, totius C D; Ac propterea cum A B, eadem ſit pars utriuſque numeri F G, C D; erunt ipſi numeri F G, C D, inter ſe æquales. Dempto ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D. Eadem igitur pars erit E B, ipſius F D, quæ ipſius G C, hoc eſt, quæ totus A B, totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

5. ſeptimi

SCHOLION.

IDEM hoc theorema uerum eſt, etiam ſi ablata ſit unitas A E; uel reliqua fuerit unitas E B; uel denique & ablata, & reliqua ſit unitas, ut ex his exemplis apparet.

A . E . . . B	*A . . . E . B*	*A . E . B*
G . . . . . . C . . F . . . . . . D	*G . . C . . . . . . F . . D*	*G . . C . . F . . D*

CAETERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita

multiplex erit, ut totus totius.

Q v o d quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D; æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita eſſe multiplicem, ut eſt totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipſius C D, ſit æque multiplex, atque A E, ipſius C F; erit e contrario totus C D, totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E. Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac proinde e contrario E B, ita multiplex erit ipſius F D, ut A B; ipſius C D, eſt multiplex. 7. *ſeptimi*

A . . . . E . . . . B
C . . . . F . . D

S i aliquando ex C D, ablata fuerit unitas C F; uel reliqua ſit unitas F D: vel denique & ablata ſit vnitas C F, & alia reliqua F D; idem demonſtrabitur, ut hæc exempla commonſtrant.

A . . . E . . . . . . B | *C . F . . D*
A . . . . E . . B | *C . . F . D*
A . . . . E . . . . B | *C . F . D*

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

S I numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

S i t numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquũ E B, eaſdem eſſe partes reliqui F D, quæ totus A B, totius C D. Sumpto enim numero G H, ęquali ipſi A B; erit

A . . . . . . K . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . L . . I . . . . . . M . . H

G H, eædem partes ipſius C D, quæ A B, eiuſdem C D, hoc eſt, quæ A E, ipſius C F. Diuiſo ergo G H, in partes G I, I H, numeri C D; & A E, in partes A K, K E, numeri C F; erit multitudo partium G I, I H, multitudini partiũ A K, K E, æqualis, eademque pars tam

A . . . . . . K . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . D
G . . . . . . L . . . I . . . . . M . . . H

G I, quam I H, ipſius C D, quæ tam A K, quam K E, ipſius C F. Cum ergo C D, numerus maior ſit numero C F, erit & tam G I, quam I H, pars ipſius C D, maior tam numero A K, quam K E, parte ipſius C F. Sumptis igitur numeris G L, I M æqualibus ipſis A K, K E; erit G L, eadem pars ipſius C F, quæ A K, eiuſdem C F, hoc eſt, quæ G I, ipſius C D; Ac proinde cum totus G I, totius C D ſit eadem pars, quæ ablatus G L, ablati C F, erit & reliquus L I,
7. ſeptimi reliqui F D, eadem pars, quæ totus G I, totius C D. Eodemque argumento oſtendemus M H, eandem eſſe partem ipſius F D, quæ eſt totus G I, uel I H, totius C D. Quoniã ergo tam G I, quam I H, eadem eſt pars ipſius C D, quæ eſt tam L I, quam M H, ipſius F D; erit uterque G I, I H,
6. ſeptimi. ſimul eædem partes ipſius C D, quæ uterque L I, M H, ipſius F D. Eſt autem G H, eædem partes ipſius C D, quæ A B, eiuſdem C D, propter æqualitatem numerorum A B, G H. Igitur & uterque L I, M H, ſimul eædem partes erit ipſius F D, quæ A B, ipſius C D. Quia uero ſi ab æqualibus A B, G H, æquales auferantur A K, K E, & G L, I M, reliqui E B, & L I, M H, ſimul æquales ſunt: Erit quoque E B, reliquus eædem partes reliqui F D, quæ A B, totus totius C D, nempe, quæ uterque L I, M H, ſimul erat eiuſdem F D. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

NON demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentẽ; quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic, reliquum numerũ E B, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus A E, numeri C F; ibi uero perſpi-

perſpicuum erat, reliquum E B, alicuius numeri eandem eſſe partem, quæ eſt A E, ipſius C F. Licet enim ipſius E B, duplũ aſſumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, ſit ita ſub multiplex numeri aſſumpti G C, ut A E, eſt ſubmultiplex ipſius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et uiciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadẽ pars erit, uel eædem partes & ſecundus quarti.

SIT numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, ſintque A, B C, minores ipſis D, E F, ſinguli ſingulis. Dico & uiciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D qualis eſt, aut quales B C, ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

Quia uero B G, G C, inter ſe ſunt æquales, & minores quã E H, H F, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponitur; Erit B G, ipſius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipſius H F; ac propterea & uterque B G, G C, ſimul, nempe B C, ſecundus utriuſque E H, H F, ſimul, nimirum E F, quarti eadem pars, uel partes, quæ B G, ipſius E H, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat. 5. uel 6. ſeptimi.

SCHOLION.

QVOD ſi loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit uiciſſim

unitas

unitas tertij numeri eadẽ pars, quæ ſecundus numerus quarti; id, quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demõſtratione, ut ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et uiciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quę numerus D E, numeri F, ſintque A B, C, ipſis D E, F, minores, ſinguli ſingulis. Dico & uiciſſim, numerum A B, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri D E, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris A B, D E, in partes A G, GB, & D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partiũ in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipſius C, quæ tam D H, quam H E, ipſius F. Viciſſim ergo eadem pars erit, aut partes A G, ipſius D H, & G B, ipſius H E, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadẽ pars erit, uel partes A G, ipſius D H, quæ G B, ipſius H E. Igitur & uterque A G, GB, ſimul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes utriuſque D H, H E, ſimul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipſius D H, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

9. ſeptimi

5. uel 5. ſeptimi.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

Sit ut totus numerus A B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, eſſe, ut eſt totus A B, ad totum C D. Cum enim ſit, ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit per defin. 20. A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes: uel certe A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, uel eaſdem partes. Sit primum A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, æque multiplex. Quo poſito erit e contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipſorum C D, C F. Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, 7. ſeptimi totius A B; Ac propterea e contrario A B, ipſius C D, & E B, ipſius F D, æque multiplex erit. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

A............E......B
C.......F...D

Sit ſecundo A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, eadem pars, uel eædem partes. Quo poſito, erit & reliquus E B, reliqui F D, eadẽ pars, uel partes, quæ totus A B, toti⁹ C D; Ac proinde, per defin. 20. erit ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. 7. uel 8. ſeptimi.

A... E.. B
C....... F.... D

A.... E.. B
C....... F...D

Contineat tertio A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, candemque inſuper illius partem, uel partes. Quo poſito, erit e cõtrario C D, totus totius A B, eædẽ partes, quæ ablatus C F, ablati A E, ut mox demõſtrabimus.

Reli-

8. *ſeptimi* Reliquus igitur F D, reliqui E B, eædem quoque partes

A ...... E ... B A .... E .... B
C ..... F .. D C ...... F .... D

erit, quæ totus C D, totius A B: Ac propterea, e contrario A B, ipſum C D, & E B, ipſum F D, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, uel partes, ut mox oſtendemus. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

Qvod ſi A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perſpicuum eſt reliquum E B, quoque eſſe æqualem reliquo F D. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... E ... B
C ..... F ... D

LEMMA A.

Qvod autem, ſi A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem illius uel partes; e contrario C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, ſit eædem partes: Et ſi C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, ſit eædem partes: e contrario A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter contineat, eandemque illius partem uel partes; hoc modo demonſtrabimus. Contineat primo A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, nempe ſemel, uel bis, uel ter, &c. eandemque inſuper partem, G B, quidem

A .. *N* .. *O* .. *G* .. *B*
C .. *I* .. *K* .. D
A ... *P* ... *Q* ... *H* ... *E*
C ... L ... *M* ... *F*

quidem ipſius C D, & H E, ipſius C F, ita ut numeri reliqui A G, A H, ſint uel æquales ipſis C D, C F, uel eorum æque multiplices. Diuiſis igitur numeris C D, C F, in partes C I, I K, K D; & C L, L M, M F, ipſis G B, H E, æquales; erit multitudo partiũ numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipſius C D, ſit eadem pars, quæ H E, ipſius C F. Similiter diuiſis numeris A G, A H, in partes A N, N O, O G; &, A P, P Q, Q H, eiſdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis: Cum enim A G, A H, uel æquales ſint ipſis C D, C F, uel eorum æque multiplices; erunt uel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F; uel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propltereaque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri C F, eſt numeri A E. Quare cum multitudo partiũ numeri C D, æqualis ſit multitudini partium numeri C F; erit C D, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E.

Contineat ſecundo A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, uidelicet ſemel, bis, ter, quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius, numerus quidem A B, partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri C F, ita ut reliqui nume-

ri A G, A H, ſint rurſum uel æquales ipſis C D,

A .. P .. Q ... G ... I .. B
C .. L ... M ... D
A ... R ... S ... H ... K ... E
C ... N ... O ... F

C F, uel eorũ æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris G B, H E, in partes G I, I B, & H K, K E, numerorum C D, C F, erit multitudo partium ipſius G B, multitudini partium ipſius H E, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris C D, C F, in partes C L, L M, M D, & C N, N O, O F, partibus G I, I B, & H K, K E, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius C D, multitudini partium ipſius C F, æqualis, quod quælibet partium numeri G B, eadem pars ſit numeri C D, quæ unaquæque partium numeri H E, eſt numeri C F. Denique diuiſis numeris A G, A H, in partes A P, P Q, Q G, & A R, R S, S H, eiſdem partibus G I, I B, & H K, K E, æquales, erit & multitudo partium numeri A G, æqualis multitudini partium numeri A H. Cum enim A G, A H, uel æquales ſint ipſis C D, C F, uel eorum æquemultiplices; erunt uel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F, uel certe numerus partium ipſius C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partiũ ipſius C F, in A H; proptereaq; multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partium numerorum G B, H E, erit quoque multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis; Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars

pars numeri C F, *eſt numeri* A E. *Quare cum multitudo partium numeri* C D, *æqualis ſit multitudini partium numeri* C F; *erit* C D, *eædem partes numeri* A B, *quæ* CF, *ipſius* A E. *Quod eſt primo propoſitum.*

I A M *uero ſit* C D, *ipſius* A B, *&* C F, *ipſius* A E, *eadem partes. Dico e contrario* A B, *ipſum* C D, *&* A E, *ipſum* C F, *æqualiter continere, eandemque inſuper illius partem, uel partes. Diuiſis enim numeris* C D, C F, *in partes numerorum* A B, A E, *erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris* A B, A E, *in partes partibus numerorum* C D, C F, *æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri* C D, *in* A B, *ſupereritque eadem pars, uel partes ipſius* C D, *quoties omnes partes numeri* C F, *continentur in* A E, *& quæ pars, aut partes ipſius* C F, *ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *&* A B, A E. *Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum* A B, A E, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *& inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum* C D, C F, *multitudine æquales. Quam ob rem* A B, *ipſum* C D, *&* A E, *ipſum* C F, *æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, uel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.*

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI ſint quotcunque numeri proportionales,

nales, erit quemadmodum unus anteceden tium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc eſt, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoque omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, ut eſt A, ad B. Sint enim primū A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, eadem pars eſt, aut partes

A ... C .. E ...
B .... D .... F ......

A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F; erit quoque uterque A, C, ſimul vtriuſque B. D, ſimul eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, uel E, ipſius F. Rurſus quia uterque A, C, ſimul, tanquam unus, utriuſque B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E, ſimul, amborum B, D, tanquam unius, & F, ſimul eadem pars, uel partes, quæ A, ipſius B. Quare, per defin. 20. eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt ipſius A, ad B.

5. uel 6. ſeptimi.

5. uel 6. ſeptimi.

Sint ſecundo A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit e contrario B, ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E; Atque adeo ut prius,

5. ſeptimi.

A .... C .... E ......
B. . . . D. . F . . . .

erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. Quare per defin. 20. eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quę eſt A, ad B. Hoc idem uerum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, ſint numerorum ad unitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, ut hic apparet,

paret, adiuuante tamen ſcholio propos. 5. huius lib.

A... C...... E......... A... C... E...... A... C... E...
B. D.. F... D. D. F.. B. D. F..

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter contitinet, eandemque inſuper partem, uel partes; Erit per lemma præcedentis propos. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur ut prius, erunt omnes B, D, F, omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. *6. ſeptimi*

A........ C.... E............
B...... D... F.........

SINT quarto & ultimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul, quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum utrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

THEOR. 11. PROPOS. 13. 14.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et uiciſſim proportionales erunt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uiciſſim eſſe A, ad C,

 ut

ut B, ad D. Nam ſint primum A, & C, minores quam B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, uel partes. Viciſſim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadē pars erit, uel partes: Ac proinde per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . .   C. . . . . .
B . . . .   D. . . . .

9. vel 10. ſeptimi.

SINT ſecundo A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, uel partes. Viciſſim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, uel partes: Atque adeo e contrario, uel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . .   C. . .
B . . . .   D . . . .

9. vel 10. ſeptimi.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo poſito, erit ob eandem proportionem, uel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; uel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, cōtinebit æqualiter, eandemq; inſuper partem, uel partes; Atq; adeo e cōtrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, uel eadem pars, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. Viciſſim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, uel partes; Ac proinde, per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A ad C, hoc eſt, erit ut A, ad C, ita B, ad D

A . . . .   C. . . . . . .
B . . .   D. . . . . .

9. uel 10. ſeptimi.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, uel ęque multiplex, uel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter cōtinebit, eandemque inſuper partem, uel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, uel eadem pars, uel certe, per

A. . . . .   C . . . .
B. . . . . .   D . . .

per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. Viciſſim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, uel partes; Ac propterea e contrario uel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, uel certe, per lemma adductum, B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit ut A, ad C, ita B, ad D. 9 *uel* 10. *ſeptimi.*

SINT quinto A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quã C. Quoniam igitur ęquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, uel eadem pars, uel eædem partes ſunt; Erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D

A . . .	C . . . .
B . . .	D . . . .

SINT ſexto A, & C, ipſis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorũ C, & D, uel æque multiplices ſunt, uel certe illi hos æqualiter continent, eandemque inſuper partem, uel partes; erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A	C . . .
B	D . . .

SINT ſeptimo ac ultimo A, & C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint quam B, & D, ſiue minores, ſiue æquales. Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, uel eadem pars, uel eædem partes; uel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, uel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & uiciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

A	C . . . . .
B . . .	D . . .

SCHOLION.

COACTI ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare, una cum lemmate propoſ. 11. ut earum ueri-

 tas

tas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, ut perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationib⁹ apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus, ut nonnulli concedunt, quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, ubi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, uel eadem pars, uel eædem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, uel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, ut manifeſtum eſt: quare reliqua omnia uerba definitionis ſuperuacanea eſſent.

15. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque ut A, ad B, ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe ut A, ad C, ita D, ad F.
13. *ſeptimi* Quoniam eſt, ut A, ad B, ita D, ad E; erit uiciſſim, ut A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob cauſam, cum ſit, ut B, ad C, ita E, ad F; erit uiciſſim, ut B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim utraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni

A............	D.........
B........	E......
C....	F...
G...............	H............

portioni B, ad F, ut demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, ut mox oſtendetur.) Ac proinde uiciſſim, ut A, ad C, ita D, ad F. 13. ſeptin.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quàm tres, ita ut ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe, ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autē ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, ruſus erit ut A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

IDEM uerum eſt, ſi loco unius numeri unitas aſſumatur, uel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A	D .....
B ..	E ......
C ...	F ....
G .	H ...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorũ, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint

A	B	C ....
D	E	F ...

eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, uel eadem pars, uel

eædem partes ; uel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D; quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.

Hoc idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

16. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterũ quẽdam numerum metiatur: Et uiciſſim æque unitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æque. Dico uiciſſim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æque metiri. Diuiſo enim numero B C, in unitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo unitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æque unitas A, numerum D, & unitas B G, ipſum E I, atque unitas G H, ipſum I K, & unitas H C, ipſum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G, numeri E I, quæ unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, ſimul numerorum E I, I K, ſimul, quæ unitas B G, numeri E I, uel unitas H C, numeri K F. Itaque quia eadẽ pars eſt unitas H C, numeri K F. quæ numerus B H, numeri E K; erit, ut ibidẽ demõſtrauimus, unitas H C, & numerus B H, ſimul, utriuſque

A. D..
B.G.H.C E..I..K..F

que numeri K F, E K, ſimul, eadem pars, quæ unitas H C, numeri K F, hoc eſt, quæ unitas A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitate H C, & numero B H, compoſitus, numerum E F, ex numeris K F, E K, compoſitum æque metietur. Si unitas igitur numerũ quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

ILLUD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris, propos. 13. oſtendit hoc in loco ſeparatim de unitate, & tribus numeris, propterea quod unitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia unitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F; erit unitas A, eadẽ pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonſtrauimus, erit uiciſſim unitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim unitate E; cũ A,

E .
A . . .   B . . .
D . . . . C . . . .

ipſum B, multiplicans faciat C; erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerũ A, & numerus B, numerum C, æque metietur. Viciſſim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur

15. *defin.*
15. *ſeptimi*

metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D; erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, unitates, atque adeo unitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autẽ

E .
A . . .　　B . . . .
D . . . .　C . . . .

& eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Aeque igitur numerus A, utrunque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſe ſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

POTEST hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicauerint, procreabitur unus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam ut prius, cũ A, multiplicans ipſum B, faciat C, oſtendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At uero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet, etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerũ factum, per defin. 15. æque metitur. Idẽ ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quando quidem ipſum numerus A, æque metitur; atque unitas E, ipſum B.

E .
A . . .　B . . . .
C . . . .

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans, fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem

tionem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, ut B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim unitate F; erit D, ex B, cōpoſitus toties, quoties unitas F, eſt in A, per defin. 15. ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem unitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit; Ac proinde, per defin. 20. erit ut B, ad D, ita C, ad E; et permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod oſtendendum erat. 3. ſeptimi

F .
A . . . .
B . . C . . . .
D . . . . . . E . . . .

THEOR: 16. PROPOS: 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiā multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI. A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cū ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicās ipſos A, & B, facit D, & E; erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum. 16. ſeptimi 17. ſeptimi

A . . . . B . . . . .
C . . .
D . . . . E . . . .

SCHO-

SCHOLION.

HANC propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, uel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, uel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, uel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quos numeri multiplicantes, uel multiplicati B, C, D: hoc eſt, eſſe, ut B, ad C, ita E, ad F; & ut C, ad D, ita F, ad G.

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E . . . . . . F . . . . G . . . .

17. uel 18. ſeptimi. *Nam cum ex A, in B, C, uel ex B, C, in A, fiant E, F; erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, uel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

20.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quar-

D quartum; & F, ex B, ſecundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, hoc eſt, ut A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam uidelicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. ſcripſimus. 17. ſeptimi 18. ſeptimi

A . . .
B . .
C . . . . . .
D . . . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

Sed iam ſit E, ex A, primo in D, quartū genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, ut quidē A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, ita G, ad E, uel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut A, ad B, ita idē G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. 17. ſeptimi 18. ſeptimi

SCHOLION.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum.

Si duo numeri duos numeros eandem, quá illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

ITA enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente,

dente, in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procrea tur ex B, conſequente in C, antecedentem.

20. ## THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui a medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit ut B, ad C, hoc eſt, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, erit numerus factus ex A, in C,

A. . . . .
B. . . . . . D. . . . . .
C . . . .

19. *ſeptimi* æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D,

19. *ſeptimi* tertium; erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, uel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor uero minorem.

SINT numeri A B,C D,minimi in proportione eadẽ, quam habent alij duo numeri maiores E, F,ita ut ſit,quemadmodum A B,ad C D,ita E, ad F. Dico A B,C D,æque metiri ipſos E, F; maiorem quidem A B; ipſum maiorem E,at minorem C D, ipſum minorem F: hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem,ipſum conſequentem. Cum enim ſit, ut A B,ad C D,ita E,ad F;erit uiciſſim, ut A B,ad E,ita C D, ad F; Atque adeo cum A B,CD,minores ſint, quam E F; erit A B, ipſius E,& C D,ipſius F, eadem pars, uel partes. Partes quidem nequaquam: Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, AB,CD, in partes A G, GB; C H, HD,numerorum E, F;erit multitudo partium A G, G B,æqualis multitudini partium CH, H D; Ac propterea A G, ipſius E, & C H, ipſius F, eadem pars. Erit ergo,ut A G,ad E, ita C H, ad F; & uiciſſim,ut A G,ad C H,ita E, ad F, uel A B,ad C D; Ac proinde numeri A G,CH, minores quam A B,C D, eandem habebunt proportionem,quam A B, C D. Quod eſt abſurdum;cum A B, C D, in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo A B,ipſius E,& C D,ipſius F, eædem partes ſunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipſum E, & C D, ipſum F,æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandẽ cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . . . .

13. ſeptimi — *20. defin.*

SCHOLION.

PARI *ratione, & hoc uerum eſt, quod Campanus docet.*

QVOT-

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A... K... B	C.. L. D	E.... M.... F
G...........	H......	I.............

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, ſiue non; ita ut non poſſint reperiri alij numeri ipſis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, ut A B, ad C D; & ſecundus ad tertium, ut C D, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. uel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio uero 20. ad 25. in 4. & 5, uel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut A B, ad C D; & H, ad I, ut C D, ad E F. Dico A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, metiri æque. Cum enim ſit ut A B, ad C D, ita G, ad H; erit uiciſſim ut A B, ad G, ita C D, ad H. (13. ſeptimi) *Eodem modo, cum ſit ut C D, ad E F, ita H, ad I, erit quoque uiciſſim, ut C D, ad H, ita E F, ad I. Quare A B, ipſius G, & C D, ipſius H, & E F, ipſius I, erit uel eadem pars,* (20. defin) *uel eædem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F; atque adeo A K, ipſius G, & C L, ipſius H, eadem pars. Erit ergo ut A K, ad G, ita* (20. defin.) *C L,*

C L, ad H; & uiciſſim ut A K, ad C L, ita G, ad H, uel A B, ad C D. Eodemque modo erit, ut C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, CL, E M, in proportionibus numerorum A B, CD, E F, & minores quam AB, CD, E F. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, CD, E F, eædem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, æque metietur. Quod eſt propoſitum. 13. ſeptimi

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, æque metiri. Nã per hãc propos. 21. A, B, cũ ſint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipſos D, E; eademq; ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æque metiatur, ac B, ipſum E; metientur æque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

A ..	B	C ...
D	E	F ......

THEOR. 20. PROPOS. 22. 19.

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadẽ ratione, ſitque perturbata eorũ ꝓportio, ut quidẽ A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex ęqualitate quoque eſſe

A	H ...
B ...	D ....
C	E ....
G	F ..

ut

ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit ut A, ad B, ita E, ad
19. ſeptimi F; erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, erit eidē numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atq; adeo

A............	H...
B...	D....
C......	E........
G........	F..

numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium, producto. Quare erit
19. ſeptimi ut A, ad C, ita D, ad F.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita ut ſit etiam C, ad G, ut H, ad D; Dico adhuc eſſe, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem, ut C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idē oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

QVONIAM Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui a permutata proportione ſumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a noſtro inſtituto erit, breuiter reliquos quatuor modos in numeris, & alia quædam oſtendere, octo ſequentibus theorematibus.

I. SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inuerſa ratione, ſiue conuertendo proportionales erunt.

SIT

Sɪᴛ, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, ſiue inuerſa ratione, eſſe ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim ſit C, ad D, ut A, ad B. erit uiciſſim C, ad A, 13. ſeptimi
ut D, ad B. Rurſus quia eſt D, ad B, A ...... C ...
ut C, ad A, erit uiciſſim D, ad C, ut B .... D ..
B, ad A, hoc eſt, ut B, ad A, ita D, ad C; Quod eſt propoſitum.

Sɪ compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt. II.

Sɪᴛ ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico & diuidendo eſſe, ut A C, ad C B, ita D F,
ad F E. Cum enim ſit ut A B, A ...... C ... B
ad C B, ita D E, ad F E, erit uiciſ- D .... F .. E
ſim, ut totus A B, ad totum D E, 13. ſeptimi
ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde, ut totus A B, ad totum D F, ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc eſt, A C, ad 11. ſeptimi
D F, ut C B, ad F E. Viciſſim ergo erit quoque A C, ad C B, ut 13 ſeptimi
D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.

Sɪ diuiſi numeri proportionales ſint; Hi quoque compoſiti proportionales erunt. III.

Sɪᴛ ut A B, ad B C, ita D E ad E F. Dico & componendo, eſſe ut A C, ad B C, ita D F, *ad E F. Cum enim ſit, ut A B, ad* B C, *ita* DE, *ad E F, erit uiciſ-*
ſim, ut A B, *ad* D E, *ita* B C, *ad* A ...... B ... C 13. ſeptimi
E F; Ac proinde A B, B C, *ſimul* D .... E .. F
ad D E, E F, *ſimul, ut* B C, *ad* 12. ſeptimi
E F: Et uiciſſim A B, BC, *ſimul, hoc eſt, totus* A C, *ad* B C, *ut* 13. ſeptimi
DE, EF, *ſimul, hoc eſt, totus* DF, *ad* EF. *Quod eſt propoſitũ.*

Sɪ compoſiti numeri proportionales ſint; Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt. IIII.

Sɪᴛ ut AB, *ad* CB, *ita* D E, *ad* F E. *Dico, per conuer-*

ſionem

ſionem rationis eſſe quoque, ut A B, ad A C, ita D E, ad DF. Cum enim ſit, ut AB, ad C B, ita DE, ad F E, erit uiciſſim,

13. ſeptimi ut totus A B, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum F E; Ac proinde, ut totus A B, ad totum DE, ita erit reliquus A C, ad reliquum DF,

A . . . . . . C . . . B
11. ſeptimi D . . . . F . . E

13. ſeptimi Viciſſim igitur, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet.

V. Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eãdem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

SIT ut AB, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, ut eſt D H, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum. Cũ enim ſit, ut B G, ad C, ita E H, ad

A . . . . . . B . . G   D . . . . E . . . H
C . . . .   F . . . . . .

F; erit conuertendo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt ut A B, ad C, ita D E, ad F; & ut C, ad B G, ita F, ad E H; erit ex æqualitate, ut AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, ut A G, ad B G; ita D H, ad EH. Itaque cum rurſus ſit, ut A G, ad BG, ita DH, ad E H: & ut BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, ut AG, ad C, ita DH ad F. Quod eſt propoſitum.

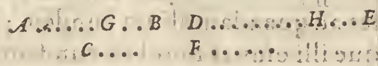
EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus.

VI. Si duo numeri ad duos numeros eandem

habeant

habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

S i t ut totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item ut detractus A G, ad C, ita detractus D H, ad F. Dico & reliquum G B, eſſe ad C, ut eſt reliquus H E, ad F. Cum enim ſit, ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit conuertendo, ut C, ad A G, ita F, ad D H.

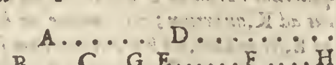


Quia igitur eſt, ut A B, ad C, ita D E, ad F; & ut C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex æqualitate ut A B, ad A G, ita D E, ad D H. Diuidendo ergo ut G B, ad A G, ita H E, ad D H. Itaque cum rurſus ſit, ut G B, ad A G, ita H E, ad D H; & ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit ex æqualitate, ut G B, ad C, ita H E, ad F. Quod eſt propoſitum.

I t e m & hoc demonſtrabimus.

S i primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto. VII.

S i t ut primus A, ad ſecundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & ut primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad ſextum F H. Dico ita eſſe A, primum ad B G, compoſitum ex ſecundo & quinto, ut eſt D, tertius ad E H, compoſitum ex quarto & ſexto.



Cum enim ſit, ut A, ad B C, ita D, ad E F; erit conuertendo ut B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur eſt ut B C, ad A, ita E F, ad D; & ut A, ad C G, ita D, ad F H; erit ex æqualitate ut B C, ad C G, ita E F, ad F H; & componendo, ut B G, ad C G, ita E H,

ad F H; & conuertendo, ut C G, *ad* B G, *ita* F H, *ad* E H. *Quoniam ergo eſt, ut* A, *ad* C G, *ita* D, *ad* F H; *& ut* C G, *ad* B G, *ita* F H, *ad* E H; *erit ex æqualitate, ut* A, *ad* B G, *ita* D, *ad* E H. *Quod eſt propoſitum.*

DENIQVE *ex his omnibus inferemus hoc theorema.*

VIII. SI quotcunque numeri ad eundem habuerint ꝓportiones, quas alij illis multitudine ęquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportioné, quam omnes hi ſimul ad eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idé numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quá idem numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT *quotcunque numeri* A B, B C, C D, *ad eundem* E, *proportiones, quas totidem* F G, G H, H I, *habent ad eundem* K: *Hoc eſt, ſit ut* A B, *ad* E, *ita* F G, *ad* K; *& ut* B C,

A . . B . . . . . C . . . . D   F . . G . . . H I
E . . . .   K . . . . .

ad E, *ita* G H, *ad* K; *& ut* C D, *ad* E, *ita* H I, *ad* K. *Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum* A D, *ad* E, *eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul, hoc eſt, ipſe* F I, *ad* K. *Cum enim ſit, ut* A B, *primus ad* E, *ſecundum, ita* F G, *tertius ad* K, *quartum: Item ut* B C, *quintus ad* E, *ſecundum, ita* G H, *ſextus ad* K, *quartum; erit quoque ut* A C, *primus cum quinto, ad* E, *ſecundum, ita* F H, *tertius cum ſexto, ad* K, *quartum. Rurſus quia eſt, ut* A C, *primus ad* E, *ſecundum, ita* F H, *tertius ad* K, *quartum: Item ut* C D, *quintus ad* E, *ſecundum, ita* H I, *ſextus ad* K, *quartum; erit etiam, ut* A D, *primus cum quinto, ad* E, *ſecundum, ita* F I, *tertius cum ſexto, ad* K, *quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.*

SED *habeat iam idem numerus* E, *ad numeros quotcunque* A B,

A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit ut E, ad A B, ita K, ad F G; & ut E, ad B C, ita K, ad G H; & ut E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, ut E, ad omnes illos ſimul, nempe ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, utpote ad F I. Cum enim ſit, ut E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoque, ut E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, ut E, primus ad A C, ſecundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, ut E, primus ad A D, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. ſint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minores que ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque; atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita ut C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties unitas eſt in E. Itaq; cũ unitas numerũ E, & numerus C, numerũ A, ęque metiatur; metietur & uiciſſim ęque unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; metietur quoque uiciſſim æque unitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem numerus

A....... B ....
C------ D ---
E —

21. ſeptimi

15. ſeptimi

 merus

merus E, utrunque A, & B, metiatur, erit numerus F, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

22. ## THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerũ, præter unitatem, cõmuni menſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habeant numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas eſt in numero D; At uero ipſum B, toties, quoties unitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt unitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt unitates in E, producit ipſum B; ſit, ut D, &

A........ B.....
C----
D--- E---

9. pron. E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D ad E; Atque adeo, cũ
18. ſeptimi D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

SCHO-

SCHOLION.

HANC *propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.*

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT *quotcunque numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris repeRiatur. Si enim nõ ſunt minimi, erunt aliqui alij minores*

A...... B........ C....
D---- E---- F---
G----

ipſis, nempe D, E, F, *minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur* D, E, F, *minimi, ſunt in proportione numerorum* A, B, C; *metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque; per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonſtrauimus; atque adeo ſecundũ unum eundem numerũ, qui ſit* G; *ita ut* D, *toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties unitas eſt in* G. *Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æque metitur; metietur quoque uiciſſim æque unitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æque atque unitas ipſos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.* 15. ſeptimi

IAM *uero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita*

vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties quoties vnitas eſt in F. Quoniã igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, *quoties vnitas eſt in* D,

A......	*B ....*	*C.....*
D ---	*E ------*	*F ---*
	G ----	

9. pron. *E, F; fit ut D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. oſtendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.*

24.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim nõ ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem, numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demõſtrandum.

A........	B.....
C....	D ---

11. pron.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

Sit uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, uel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi, ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot unitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt unitates in F; ſit

A .... B ...
C ....
D ....
E ---- F-----

ut F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; & contra E, ip- 9.pron.
ſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autē 16.ſeptimi
idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartū
fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; erit ut
E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartū. Quia 19.ſeptimi
uero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur me
tiri, erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum ſint in- 25.ſeptimi
ter ſe primi, in ſua proportione minimi erunt. Aeque igitur 23.ſeptimi
metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, ni 21.ſeptimi
mirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur utrunque B, & C; nō erūt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 25. PROPOS. 27. 26.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B, gignaturque C, ex A, in ſe ipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æquali ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt, erit numerus ex A, in D,

26. *ſeptimi* hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nempe C, ad eundem B, primus. Eademque arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe.

A.... B.......
C................
D....

Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

27. ## THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrunque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.

SIT uterque A, & B, ad utrunque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter ſe primos eſſe. Cum enim uterque A, & B, primus ſit ad C; erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum uterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ex ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus eſt ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat oſtendendum

A..... B...
E...............
26. *ſeptimi* C... D..
F........

26 *ſeptimi.*

28. ## THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans uterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi intèr ſe erũt:

Et

Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rursũ fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoq; eſſe inter ſe primos.

A . . .	B . .
C.	D. . . .
E	F. . . . .
G, 81.	H, 16.

Cum enim A, B, ſint inter ſe primi, erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus. 27 ſeptimi

RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, erit & C, factus ex A, in ſe, ad B, & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: 27. ſeptimi
Erat autem & C, ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrunque B, D, primus erit; Ac proinde E, factus ex A, in 28. ſeptimi
C primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi ſint ad B, erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademque 26. ſeptimi
ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur uterque A, E, ad utrunque B, F, primus eſt; erit & G, factus ex A, in E, 28. ſeptimi
ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus; necnon & H, ad A; Qua 26. ſeptimi
re & genitus ex A, in G, ad genitum ex B, in H, primus erit: 28. ſeptimi
cum uterque A, G, ad utrunque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint:

Etiam

Etiam uterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi uterque ſimul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi A B, B C. Dico & utrunque ſimul A C, primũ eſſe & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur

A . . . . B C
D - - - -

12. pron. D, metitur totum A C, & ablatum A B, metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter ſe ſunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad BC, oſtendemus eundem eſſe primum.

SED iam uterque A B, B C, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, uidelicet ad A B. Dico & A B, B C, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, &

10. pron. B C; metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, cõpoſitum; Ac proinde A C, A B, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur A B, B C, inter ſe primi. Eodemq; argumento oſtendemus A B, B C, inter ſe primos eſſe, ſi A C, ad BC, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad unũ illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim A C, ad A B, primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiuſdem. quod eſt propoſitum.

32. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem

nem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter unitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B........

C------

THEOR. 30. PROPOS. 32. 33.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiã unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem unum ipſorum A, & B, ſi non utrunque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur uero ipſum C, toties, quot sũt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; erit ut D, primus ad A, ſecundũ, ita B, tertius ad E, quartũ, *19. ſeptimi* Quia uero prim⁹ D, ad A, primus eſt, *31. ſeptimi* cum eum non metiatur; erunt D, & A, in ſua proportione *23. ſeptimi* minimi. Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, *21. ſeptimi* ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum

A.... B......

C.........................

D.... E........

ſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquẽ, &c Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

........B .....A

Eodem *modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.*

Si duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

Nam *ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compoſitus ad eum ſit. Dico D, quoque ad unum ipſorum A, B, compoſitũ eſſe. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterque A, & B, ad D, primus. Quare & C, ex illis genitus, ad eundem*

A . . . *B* . . . .
C . . . .
D . . . .

26. ſeptimi *D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur uel metiri ipſum C, vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad utrunque.*

30. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compoſitus A. Dico aliquem numerũ primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si uero compoſitus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel compoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus 11. pron.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia uero numerus non diminuitur infinite, ueniemus tandem ad aliquẽ numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, metietur quoque compoſitum A. Omnem ergo compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum. 11. *pron.*

A.................
B....... C...

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt; metietur eum aliquis numerus, uel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A; metietur quoque C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. 11. *pron.*

A...............
B... C--

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum uel eſſe primũ, uel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus uel primus ſit, uel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si vero compoſitus; metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum. 33. *ſeptimi*

A.........

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem ratio-

nem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habẽtes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C. ſiue non; oporteatque totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti. Si primi inter ſe ſunt; erũt ipſi in continuatione ſuarum proportionũ minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib.

A . . . . . .   B . . . .   C . . . .
D . .
E . . .   F . .   G . . . .
H ----   I ----   K ----
L -----

demonſtrauimus. Si uero non ſunt inter ſe primi, inuenta
3. ſeptim. ſit maxima earum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorũ A, B, C. Quod enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per
9. pron. E, F, G; fit, ut D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

QVOD uero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æque, ut ad propos. 21. huius lib. oſtendimus; metiantur eos per nume-
9. pron. rum L. Quo poſito L, multiplicans numeros H, I, K, pro-
8. pron. ducet numeros A, B, C; & uiciſſim L, ipſos A, B, C, metietur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, ſecundus multiplicans L, tertiũ
19. ſeptimi facit eundem A; erit, ut E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quam H: Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C, ſed

ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C. Eademque eſt in cæteris ratio.

SCHOLION.

Ex his facili uia comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt ſi proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non, reperiemus

A, 16. B, 24. C, 36. D, 14. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F & G, minimos in proportione duorum A, & B, nempe illos, per quos I, maxima eorum cõmunis menſura eos metitur.

CAETERVM *aliquando contingit unum numerorum E, F, G, inuentorum eſſe unitatem, quando ſcilicet D, maxima menſura uni ipſorum A, B, C, æqualis eſt, ut ex his exemplis*

A . . . *B* . . . . . *C* . . . . *A* . . . *B* . . *C* . . . . . .
D . . . *D* . .
E . F . . . G . . . E . . F . . G . . .

apparet. Manifeſtum eſt autem, inuentos E, F, G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire,

quem illi minimum metiantur, numerum.

Sɪᴛ reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quē A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, uel ex B, in A; metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omniū, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, tam ex A, in E, quam ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium; erit, ut A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, & ob id, in ſua proportione minimi ſint) æque metientur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam uero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; erit C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, ut oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C; atque adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

7. *pron.*

A . . . . B . . . . .
C . . . .
D ——————————
E ——— F ———

9. *pron.* — 19. *ſeptimi* — 23. *ſeptimi* — 21. *ſeptimi* — 17. *ſeptimi*

Sɪɴᴛ ſecundo dati numeri A, & B, non primi inter ſe. Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, ut ſint quatuor numeri proportionales, nempe A, ad B, ut C, ad D. Quo poſito, fiet idem numerus, ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. factus ergo ſit E. Dico E, hac uia procreatū eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur

35. *ſeptimi* — 19. *ſeptimi* — 7. *pron.*

A . . . . B . . . . . .
C . . D . . .
E . . . .
F ——————
G ——— H ———

tiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tã A, multiplicatus a D, quam B, multiplicatus a C, ipſum E, producat; metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod uero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium; erit, ut A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, uel H, ad G, metientur ipſos H, & G, æque; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia uero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; erit E, ad F, ut D, ad G; Ac propterea cũ D, metiatur ipſum G, ut oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

7. *pron.*

9. *pron.*

19. *ſeptimi*

17. *ſeptimi*

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiantur,

SCHOLION.

HOC *autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.*

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiã me-

 tiantur:

tiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Metiantvr duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, ſitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum C D, metiri. Si enim E, ipſum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E.

A . . . B . . . .
C . . . . F —— D
E . . . .

Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties poteſt, numeru, ſi fieri poteſt, F D, minorem ſe, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur; & E, ipſum C F; metietur quoque tam A, quam B, ipſum C F. Itaque A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F; metientur & reliquum F D. Eſt autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim; Quare E, ipſum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. *pron.*
12. *pron.*

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quẽ illi minimum metiantur, numerum.

36. ſeptimi Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primo C, ipſum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipſum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiantur, minimum quoque eſſe, quẽ tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur,

A . . .   B . . . .   C . . . .
D . . . .
E ————

tiantur, ſi fieri poteſt A, B, C, alium numerum E, ipſo D,
minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E,
minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B,
metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim.
Immo, cum A, & B, metiantur ipſum E, & D, ſit minimus,
quem ijdem A, & B, metiuntur; metietur quoque D, ipſum *37. ſeptimi*
E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

Sed iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. Inuento
igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe mi- *36. ſeptimi*
nimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum me-
tiantur, ita oſtendetur. Cum A, &
B, metiantur ipſum D, & D, ipſum
E; metientur quoque A, & B, ip- *11. pron.*
ſum E. Metitur autem & C, eundẽ
E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum
E, metiuntur. Quod autem E, ſit

A.. B... C....
D......
E............
F ———

minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabi-
tur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt. A, B,
C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur
A, & B, ipſum F, metiuntur; metietur quoque eundem F, *37. ſeptimi*
numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri
A, & B, metiantur; Atque adeo cum C, & D, me-
tiantur ipſum F, minorem, quam E; non erit E, minimus,
quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra
hypotheſim. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; me-
tietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem me- *37. ſeptimi*
tiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdũ.
Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem me-
tientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus nume
ris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, nume-
rum. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Seqvitvr ex his, ſi tres numeri numerum quempiam me
tiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nã
in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod
A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſten-
ſum eſt, & E, minimum quem A,
B, C, metiuntur, eundem
F, metiri.

SCHOLION.

Hoc corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, ſitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partē D G, relinquatque numerum G E, ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum D G; metientur

A.. B... C....
D..........................G---E
F............

11. pron. *quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum D E, ponantur metiri; metientur & reliquum G E, ipſo F, minorē.* 12. pron. *Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiantur. Quod eſt abſurdū, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.*

Pari ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur: Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum eſt.

37.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

Metiatvr numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquā a B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot unitates ſunt in numero C. Quia igitur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; & uiciſſim unitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atque adeo eadem pars erit unitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem unitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, ut ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit

A............
B.... C...

15. ſeptimi

erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendũ erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nã cũ B, pars denominetur a C; ſit autẽ & unitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. Viciſſim ergo & unitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. 15. ſeptimi
Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandũ erat.

A ....
B ... C .....

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, hoc eſt, qui ipſas denominent, D, E, F; minimusque, quem D, E, F, metiantur, numerus G. 38. ſeptimi
Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cũ D, E, F, ipſum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. 39. ſeptimi
Quod uero G, ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C; metientur ipſum numeri D, E, F, a parti- 40. ſeptimi

D .. A. Secunda
E ... B. Tertia
F .... C. Quarta
G ....
H ------------

 bus

bus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Qvod ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipſius G, denominatæ ſcilicet a D, E, F. Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L; metietur æque vnitas ipſos I, K, L, & numeri D, E, F, ipſum G. Viciſſim ergo metietur quoque æque vnitas ipſos D, E, F, & numeri I, K, L, ipſum G; atque adeo unitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo unitas ſit pars ipſorum D, E, F, ab ipſis denominata; erunt & I, K, L, ipſius G, partes denominatæ a D, E, F.

A. Secunda D . . I . . . . . .
B. Tertia E . . . K . . . . .
C. Quarta F . . . . L . . .
G . . . .

15. *ſeptimi*

Ex his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes a numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; ſit illius duplus, numerus H, triplus uero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimũ, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, &

H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet a D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ip-

G. . . . . A D . .
H . . . . B E . . .
I . . . . C F . . . .
K ———— M ——— L
N ———————————— P —— O

ſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos mul
tiplices ipſius G; metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & 11. pron.
reliquos multiplices ipſius G. Quare H, I, & reliqui numeri
ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris 39. ſeptimi
D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

QVOD *autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus dictas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius K L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipſo G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A,*
B, C; metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus dictis de- 40. ſeptimi
nominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundẽ K L. Metitur autem & G, ablatum K M, ſibi æqualem: Igitur &
reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. 12. pron.
Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt, huiuſmodi partes habens.

NON *aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, nempe N O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autẽ H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G. Quia igitur*
N O, partes habet A, B, C; metientur ipſum numeri D, E, F, a 40. ſeptimi
partibus illis denominati. Ac idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum N P, ablatum ipſi H,
duplo æqualem. Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, mi 12. pron.
norem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea

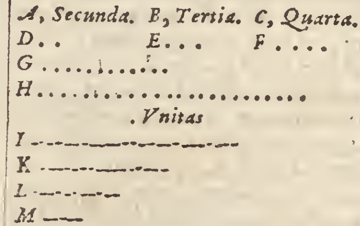
I, ter-

I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

H V C quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM repetire, qui minimus cũ ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusque ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cũ ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autẽ vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque



adeo H, habet partem A, nempe numerum G, a D, denominatã. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nempe numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nempe unitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus dictas partes hoc ordine continens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, a D, denominata; erit K, toties in I,

quoties

quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & I, ex F, in M, Itaque cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I; erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & ut G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit, per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autẽ H, numerus numero I, maior; vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quã H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum. 15. defin. 17. ſeptimi

H.	G.	F.	Vnitas.
I.	K.	L.	M.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda, ac demonſtratio: Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hæc partem a 3. denominatam; & hæc aliam a 4. & hæc aliam a 5. & hæc denique partem a 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, nempe ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM VIII.

1. ### THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi uero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationẽ habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionaliũ quotcunque A,B,C, D. extremi A,& D, inter ſe primi ſint. Dico A, B,C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunq; numeri ſunt A,B,C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, q bini ſumuntur, & in eadẽ ratione; erit, ex æ-

A........ E---
B............ F----
C................. G------
D.......................... H----------

14. ſeptimi qualitate, ut A,ad D,ita E,ad H: Sunt autem A, & D, in
23. ſeptimi ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur.
21. ſeptimi Igitur A,ipſum E,& D, ipſum H,æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri dein-

ri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLION.

PERSPICVVM *autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D, ſint continuè proportionales, ut vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſæ ſunt, quemadmodum in priori eadem ſemper proportio reperitur.*

A.... E ---
B...... F -----
C........ G ------
D.......... H --------

PROBL. 1. PROPOS. 2. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſeipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, ad B; hoc eſt, eſſe ut C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiãt C, & D; erit ut A, ad B, ita C, ad D. 17. ſeptimi

A.. B...
C.... D...... E........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales ſunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod uero in eadẽ ratione ſint minimi, ita demonſtrabitur. Quoniam extremi

mi C, & E, procreati ſunt ex A, & B, in ſe ipſos; ſunt autem
24. *ſeptimi* A, & B, inter ſe primi, quod minimi ſint in ſua proportio-
29. *ſeptimi* ne; Erunt & C, E, extremi, inter ſe primi. Quare C, D,
1. *octaui.* E, minimi ſunt in ratione A, ad B.

Iam uero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos eſſe in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales ſint in ratione A, ad B, ita demonſtrabimus. Quoniam A, multiplicans ipſos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, numeri F, G, H, eaſdem proportiones, quas C, D, E, hoc eſt, quam habet A, ad B.

A.. B...
C.... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36 N, 54. O, 81.

Rurſus quia A, & B, ipſum
18. *ſeptimi* E, multiplicantes, fecerunt H, & I; erit quoque, ut A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi ſint, ita perſpicuum fiet. Quoniam A, & B, mini-
24. *ſeptimi* mi in ſua proportione, ſunt inter ſe primi; factique ſunt C, & E, ex A, & B, in ſe ipſos; Item procreati ſunt F, & I ex A, B, in C, E; nempe F, ex A, in C, & I, ex B, in E; erunt
29. *ſeptimi* & F, I, extremi, inter ſe primi. Quare F, G, H, I, in ſua
1. *octaui.* proportione, quæ eſt A, ad B, minimi ſunt.

Non aliter, ſi ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Eodem modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D,
18. *ſeptimi* *C: & F, ex A, in C. Quo peracto, numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ipſos*

ſos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius.

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in I, H, G, & ex A, in C.

COROLLARIVM. I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea uterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuētorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROL-

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, uel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, uel ex B, in F, G, H; ut ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLION.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorũ quidẽ proportiones a numero A, horũ vero a B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo uides C, & E, extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, nempe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi conſtituuntur. Nam vltimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi

minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademque in reliquis eſt ratio.

Boetius autem, & alij regulam hanc ita explicant. Sumantur tot numeri continue ab unitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio ſit in proportione ſeſquialtera, hoc eſt, a 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquinta, ſumendi erũt quinque numeri ab unitate quincupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625. 750 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neque in priori exẽplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionẽ ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, ut ex demonſtratione liquet. Hinc enim ſit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, ut primus ad ſecundum, vt propos. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cũ eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

Sint numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inue-

niantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, uel B, ad C, uel C, ad D. Deinde iuxta uiam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18, N, 27.

Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter ſe primi: Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

HAEC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & uerbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri non poſſent, ex præcedenti problemate K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunq; continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, ut conſtat ex 1. theor. Et uiciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ut

ex

ex ſcholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper e cõtrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, ut manifeſtum eſt in exemplo nuper adducto 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, ſecundus & tertius; quoties B, ipſum E, metitur, toties A, metiatur ipſum F; & quoties C, eundem E, toties ipſum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos eſſe in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita oſtendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipſos F, & E, hoc eſt, per eundem numerum; metiantur per H. Quo poſito, A, & B, multiplicantes ipſum H, producent F, & E. Quare erit ut A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipſos E, & G, erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales ſunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi ſint, ſic manifeſtum erit. Si non ſunt minimi, erunt aliqui illis minores, ſingulis ſinguli, in eiſdem rationibus: ſint, ſi fieri poteſt, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione, ipſi æque metientur I, & K, in eadem proportione exiſtentes, nempe B, ipſum K; conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentem.

36. ſeptimi · *9. pron.* · *18. ſeptimi* · *21. ſeptimi*

A, 6.	B, 5.	C, 4.	D, 3.
H, 4.	F, 24.	E, 20.	G, 15.
I ———	K ———	L ———	

cedentem. Quare cum B, & C, ipſum K, metiantur, me-
37. ſeptimi tietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, me
tiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi F, E, G, minimi ſunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. Inuento
36. ſeptimi rurſum numero G, minimo, quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius; quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur A, ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non.

A, 6. B, 5. C, 4 D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ----- M ----- N ----- O -----

Metiatur primũ; Et quoties E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B. ipſos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G, ad I: & ut E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; ipſi
21. ſeptimi. metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nempe B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur;
37. ſeptimi tur; metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdũ. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

SED iam E, non metiatur ipſum I. Inuento ergo numero

mero K,minimo,quem E,& I,metiantur ; quoties I,ipſum K,metitur,toties quoque G,ipſum L, & H, ipſum M, metiatur : & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M,L, K, N,eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim 36.ſeptimi

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O ---- P ---- Q ---- R ----

H, G, I, ipſos M, L, K,æque metiantur; erit ut ſupra, quẽadmodum H, ad G, ita M, ad L; & ut G, ad I, ita L, ad K; Eſt autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad B; & ut G, ad I, ita C, ad D; quod & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur ut A,ad B,ita M,ad L; & ut C, ad D,ita L,ad K. Atqui ut E,ad F,ita quoque eſt K,ad N,cum E, F,æque ipſos K,N,metiantur: Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si nãque non ſunt minimi; dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, ipſi æque metientur O, P, 21.ſeptimi in eadem ratione exiſtentes, nimirum B,conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æque, uidelicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cum B,& C,ipſum P,metiantur, metietur quoque G,mini- 37.ſeptimi mus,quem metiuntur B,& C, eundem P. Quia uero oſtenſum eſt,eſſe ut G, ad I, ita L,ad K, hoc eſt,ita P,ad Q; erit permutando,ut G,ad P,ita I,ad Q: Atque idcirco, metiente G,ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E,eundem Q, (quod E, F,in ſua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nempe antecedens E, 21.ſeptimi antecedentem Q.) Ergo metientibus I, E,ipſum Q; metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E,eundem 37.ſeptimi Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; proptereaque ipſi M,L,K, N, minimi ſunt.

Qvod ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum,ut

 nuper

nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primũ M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F: Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si uero S, ipſum N, non metiatur; ſumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiat K, ipſum P; & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties uero S, eundem O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demõſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, uel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2.
M,48. L,50. K,30. N,105. O,70.

36. ſeptimi

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

SCHOLION.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtũ eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & conſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus

libus in datis rationibus, ſi iȷ multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur aliȷ in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; poſterioris uero E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; uel ex proportionibus C, ad F; & D, ad E, ita ut latera unius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E; fecit A, & G; erit A, ad G, ut C, ad E. *17. ſeptimi* Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. *27. defin.* Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24.	B, 48.		
	G, 48.		
C, 4.	D, 6.	E, 3.	F, 16.

EODEM argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, cōpoſitā eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; erit A, ad G, ut C, ad F. *17. ſeptimi* Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportioni-

A, 24.	B, 48.		
	G, 96.		
C, 4.	D, 6.	F, 16.	E, 3.

27. *defin.* portionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſquam ullum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquã illorũ ullum metiri. Quod enim nullus proxime inſequentem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, uero ipſum B, non metiatur;

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod uero nec alius quiſquam illorum ullum metiatur, ſic demonſtrabimus. Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, ut A, ad C, ita F, ad H. Quia uero eſt ut A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non non erit unitas, alias F, ipſum G, metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur. Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit unitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, ut F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium a ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demõſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

Margin notes: 2. *octaui.* (beside "tiatur, ſic demonſtrabimus…"); 3. *octaui.* (beside "F, & H, ſint inter ſe primi…")

SCHO-

SCHOLION.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam ullius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequẽtis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum ullius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, ut C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, ut D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; neque alius quiſquam illorum ullum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum ullius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. docuimus. 6. octaui

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

Sed & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus uero ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

Sɪɴᴛ deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cum

A,3. B,6. C,12. D,24. E,48.

ſit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur.
11. pron. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; metietur quoque
11. pron. B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.

Sᴇᴅ iam primus A, multiplex ſit B; ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, mul-

A,48. B,24. C,12. D,6. E,3.

tiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur e contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, ut demonſtratum eſt; Ac propterea e contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

Cᴏɴᴠᴇʀᴛᴇᴍᴠs etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

Sɪ ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, uel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex: neque primus ſecundi multiplex erit.

Sɪɴᴛ deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel

A, vel alius quiſque nullum a ſecundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, ſecundum. Si enim A, primus ſecundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentiũ. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neque alius quiſquam ullum a ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.

IAM vero A, primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo B, ſit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecũdi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet ſequentium, ex ijs, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neque alius quiſquam ullius a ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit.

A,81. B,54. C,36. D,24. E,16.

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri; neque alius quiſquam ullũ metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcirco, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum. 6. octaui.

A,3. B,6. C,12. D,24. E,48.

SCHOLION.

VT theorema, quod ſecũdo loco in ſcholio præcedẽtis ꝓpoſ. demõſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc ꝓpoſ. hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, uel alius quiſquam cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate ſcholij præcedentis.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; ſitque ut A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis ĩ ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, ut A, ad B, atque adeo ut E, ad F, ita G, ad K. Quare cũ G, & K, inter ſe primi ſint, nempe extremi minimorum numerorum, ac propterea

A, 24.	C, 36.	D, 54.	B, 81
G, 8.	H, 12.	I, 18.	K, 27.
E, 32.	L, 48.	M, 72.	F, 108.
A, 40.	C, 20.	D, 10.	B, 5
G, 8.	H, 4.	I, 2.	K, 1.
E, 8.	L, 4.	M, 2.	F, 1.
A, 27.	C, 9.	D, 3.	B, 1.
G, 27.	H 9.	I, 3.	K, 1.
E, 108	L, 36.	M, 12.	F, 4.

3. octaui.

pterea in ſua proportione minimi; æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producunt, ex 9. pronunciato; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propos. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat. 23.&21. ſeptimi

SCHOLION.

NON ſolum ex demonſtratione cõſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadẽ eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propoſitio uera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi uel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cuiusuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalem. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportiornalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis

inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, uel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam nec inter binarium & vnitatem, nec inter duos numeros ſola vnitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abeſt, ut aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interijcitur ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior uero quam C D, vnitate quoque. Dico E F, non eſſe medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur eſſe A B, ad E F, ut E F, ad C D; ablato ex A B, numero A G, ipſi E F, æquali, ut reliqua ſit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipſi C D, æquali, ut relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque ut A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum, cum A G, E H, ipſis E F, C D, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo E F, medius proportionalis eſt inter A B, & C D.

A . . . . . . G . B
E . . . . . H . F
C . . . . . . D

11. ſeptimi

Ex quibus fit, nec illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; nec illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu uulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit. Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo, 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariam ſecari non poſſe. Vnde

Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapente, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura in Muſicis.

RVRSVM ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1 demonſtrauimus, quadratum diametri duplũ ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum uero proportio ſit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus: Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam biſariam ſecet, ut oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incõmenſurabilem. qua de re plura ſcribemus in 9. & ultima propos. lib. 10.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi; & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrunque eorum, ac unitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue

nue proportionales inter unitatem,& A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A,& B,cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A,ad C; ſumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo aſſumptorum æqualis ſit multitudini A, C, D, B.

A,8.	C,12.	D,18.	B,27.
	Vnitas.		
	E,2.	F,3.	
G,4.	H,6.	I,9.	
K,8.	L,12.	M,18.	N,27.

2. octaui. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt,erunt A,C,D,B, minimi in proportione

1. octaui. E,ad F. Sunt autem & totidem K,L, M, N,ex conſtructione,in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A,C,D,B,æquales ſunt, ſinguli ſingulis, ut K,ipſi A; & N, ipſi B,ne minores minimis dentur. Quia uero, ut conſtat ex demonſtratione propos. 2.huius lib.E, ſeipſum multiplicans produxit G,multiplicans uero ipſum G, fecit K; metietur E,ipſum G,per E; & G, ipſum K, per eundem E: Metitur autem & unitas ipſum E,per E. Aeque igitur metietur unitas ipſum E,& E,ipſum G,& G,ipſum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipſius E,& E,ipſius G,& G, ipſius K. Per defin. ergo 20. proportionales ſunt deinceps, unitas & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit, ex eadem demonſtratione propos. 2.huius lib.quod F,ſe ipſum multiplicans producat I, multiplicans uero ipſum I, faciat N; metietur F,ipſum I,per F; & I,ipſum N,per eundem F: Metitur autem & unitas ipſum F,per F. Aeque igitur metietur unitas ipſum F,& F,ipſum I, & I,ipſum N; Ac propterea eadem pars erit unitas ipſius F, & F, ipſius I, & I,ipſius N. Per definitionem igitur 20. proportionales ſunt continue, unitas & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate æqualis ſit multitudini A,C,D,B; tot cadent medij continue proportionales numeri inter unitatem,& K, numerum, ſeu A,ſibi æqualem; & inter unitatem, & numerũ N, ſiue B, ſibi æqualem, quot inter numeros A,B. Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi,& inter eos medij, &c. Quod oſtendendum erat.

(Margin notes: 7. pron. 5. pron. beside "tur E,ipſum G…" and "tur autem & unitas…"; 7. pron. 5. pron. beside "N; metietur F…" and "Metitur autem…")

SCHO-

SCHOLION.

Perspicuum autem eſt, numeros, qui continua proportione cadunt inter numeros *A*, & B, ac unitatem, habere proportiones denominatas a minimis numeris proportionis *A*, ad C; hoc eſt, quas habent E, & F, numeri ad unitatem; id quod in ſcholio propos. 2. huius lib. aſſeruimus.

Constat quoque ex demonſtratione hac, ſi numerus ſe ipſum multiplicans aliquem fecerit; & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps: omnes productos eſſe continue proportionales ab unitate. Oſtenſum enim eſt & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propos. 2. huius lib. continue eſſe proportionales ab unitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipſorum, & unitatē deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

Cadant inter utrunque numerorum A, B, & unitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & unitatem, numeri C, D, E. At vero inter B, & unitatē, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
Vnitas.

A, & B, quot inter utrunque A, B, & unitatem. Multiplicantes ſe mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat *K*, & L. Rurſus idē C, multiplicans K, L, & H,

faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſunt inter utrunque A, B, & unitatem. Quoniam igitur eſt, ut unitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur unitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum

5. pron. A: Metitur autem unitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſũ E, & E, ipſum A, per C, metietur. Quare C, ſeipſũ multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
9. pron. C, 3. F, 6.
Vnitas.

& multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, &

17. ſeptimi I; erit, ut C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicãs C, & F, fecit I, & G, erit ut C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L, habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt

18. ſeptimi L, & H, erit ut C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, N, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O; habebunt, ex ijs, quæ a nobis ſunt demonſtrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cũ

18. ſeptimi C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, ut C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, uel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, uel F, G, H.

Quocirca ſi inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

SCHOLION.

Ex his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales ſunt C, & F.

Patet etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hũc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, exiſtentibus C, D, E, A, continue proportinalibus ab unitate D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium ſumentes.

Si ſint ab unitate duo ordines numerorum continue proportionaliũ, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab unitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab unitate; quarti uero eiuſdẽ triplicatã; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps uno amplius. I.

Sint numeri A, B, C, D, continue ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H: Dico proportionẽ B, tertij ab unitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam inter utrunque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius unus proportionalis; inter B, quidem & unitatem, numerus A:

D, 81.	M, 108.	N, 144.	O, 192.	H, 256.
	C, 27.	K, 36.	L, 48.	G, 64.
	B, 9.	I, 12.	F, 16.	
		A, 3.	E, 4.	
		Vni-	-tas	

At inter F, & unitatem numerus E; cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo, per ſcholium huius propos, in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem mo- 10. octaui.

 do

do cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot nimirum cadunt inter utrunque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales.

D, 81. M, 108. N, 144 O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
Vni- . -tas

Quoniã igitur ex defin. B, ad F, proportionẽ habet duplicatam eius, quã habet B, ad I: Eſt autem ut B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt ut C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.

HOC *idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.*

11. SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti uero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps uno amplius.

SINT *ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, et ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum, proportionis B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremo ex F, quoque in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab unitate, ut conſtat ex ſcholio propos. 9. huius lib.*

Eademq;

Eademque ratione erunt B,N,O,P,ab unitate proportionales; necnon & F,Q,R,S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt,rationis B,ad A, ex theoremate 1. huius ſcholij: Eſt autem, ex defin. eiuſdem rationis B,ad A,duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G,vt K, ad Q. Nam ex eodem 1.theoremate,eſt ratio K,ad Q,duplicata rationis A, ad F; & eiuſdem,ex defin.duplicata eſt ratio A, ad G.

E, 162. Vnitas. I, 512.
D,54. H,128.
C,18. G,32.
B,6. F,8.
A,2.
N,36. K,4. Q,64.
O, 216. L, 8. R,512.
P, 1296. M, 16. S,4096.

Quare cum ſit C,ad A,vt N, ad K; & A, ad G, vt K,ad Q; erit ex æquo C,ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N,ad Q, duplicata eſt rationis B,ad F, ex theoremate 1.huius ſcholij. Igitur & ratio C,ad G,duplicata eſt rationis B,ad F. Eiſdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1.theoremate,triplicata eſt rationis B,ad A; & eiuſdem triplicata eſt ratio D,ad A,ex defin. Igitur eſt D,ad A, vt O, ad L. Eodemque modo eſt A, ad H, ut L, ad R, quod utraque proportio triplicata ſit proportionis A, ad F. Eſt ergo ex æquo D, ad H,vt O, ad R; ſed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B,ad F,ex 1.theor. Igitur & ratio D,ad H, triplicata eſt eiuſdẽ rationis B, ad F. Nõ ſecus demõſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri unius ordinis deſinãt in unitatem, ut ex hac ſubiecta figura eſt manifeſtũ,in qua I, eſt unitas.

E,81. I,1.
D,54. Vnitas. H,2.
C,36. G,4.
B,24 F,8.
A,16.
N,575. K,256. Q,64.
O, 13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

CAETERVM theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib.14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris,quam illud in lineis. Ex his autem in hunc

modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. *Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.*

III. SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT *inter utrunque numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C.*

A, 162. *Q*, 216. *R*, 288. *S*, 384. *B*, 512.
F, 54. *O*, 72. *P*, 96. *I*, 128.
E, 18. *N*, 24. *H*, 32.
D, 6. *G*, 8.
C, 2.
K, 9. *L*, 12. *M*, 16.

Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot ter E, & C, & inter H, & C. Sumptis n. tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt eiuſdẽ rationis D, ad G. Igitur eſt ut K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L,
8. octaui. *cadet quoque vnus medius, nempe N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, unus medius cadit. Simili modo oſtendemus, inter F, & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt; ſi ſumantur quatuor minimi numeri in ratione D, ad G. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi.*

HOC *etiam uerum eſt, ſi loco alterius numeri, nempe B, unitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt in hac ſubiecta figura, in*

in qua numer⁹ B, vnitas eſt, caduntque tã inter A, et C, quam inter B, & C, tres numeri

A, 1048576.	*Q, 32768.*	*R, 1024.*	*S, 32.*	*B, 1.*
F, 65536.	*O, 2048.*	*P, 64.*	*I, 2.*	
E, 4096.	*N, 128.*	*H, 4.*		
D, 256.	*G, 8.*			
C, 16.				
K, 1024.	*L, 32.*	*M, 1.*		

cõtinue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, proinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. — 11.

DVORVM quadratorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatã habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, unum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes ſe mutuo C & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans ſeipſum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipſum D, multiplicans fecit E, ex conſtructione; erit ut C, ad D, ita A, ad E. *17. ſeptimi* Rurſus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex conſtructione; & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia uero, exiſtentibus A, E, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, duplicatam rationẽ

A, 9	E, 21.	B, 49.
C, 3		D, 7.

habet eius,quam habet A,ad E ; duplicatam quoque rationem habebit A,quadratus ad B,quadratum,eius, quam habet C,latus ad latus D ; cum hæc proportio eadem ſit, quæ A,ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandũ erat.

SCHOLION.

Perspicvvm eſt ex dictis,inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A,ad E,medium proportionalem, quæ lateris C,ad latus D, vt demonſtratum eſt.

A,9. E,21.B,49.
C,3. D,7.

Pari ratione liquet,numerum medium proportionalem E, & utrumlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, E, B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C,ad D,hoc eſt, eſſe A,ad E,& E,ad B,ut C,ad D ; metiatur autem latus D,quadratum ſuum B,conſequens conſequentem,ſi de proportionibus E,ad B,& C,ad D,loquamur; metietur & C,ipſum E,antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E,ad B,ut C,ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A ; Igitur E,& A , menſuram communem habent C ; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E,vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A,antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum E,conſequens conſequentem. Quare cum & latus D,metiatur ſuum quadratum B ; habebunt E, & B,communem menſuram D ; Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A ; poſteriorum vero E,B,menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

11. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri : Et cubus

cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A,& B,quorum latera C, & D. Dico inter A,& B,duos medios numeros continue proportionales cadere: Et propoitionem A,ad B, cubi ad cubum,triplicatam eſſe proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans C, ſeipſum ſaciat E,& D,ſeipſum multiplicãs faciat F; At C,& D,

A,27.	H,36.	I,48.	B,64.
	E,9.	G,12.	F,16.
	C,3.	D,4.	

ſe mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes uero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C,ſeipſum, & D,multiplicans fecit E,& G; erit,ut C,ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D,multiplicans C, & ſeipſum, fecerit G, & F; erit quoque ut C,ad D, ita G, ad F; proptereaq; E,G,F,continue proportionales ſunt in ratione C,ad D. Rurſus,quia ex defin.cubi C,ipſum E,multiplicans fecit A; & ex conſtructione multiplicans ipſum G,fecit H; erit ut E,ad G,hoc eſt, ut C,ad D,ita A, ad H. Similiter cum D, ipſum G, multiplicans fecerit, ex conſtructione, numerum I; multiplicãs uero ipſum F,ex defin.cubi, fecerit cubum B; erit quoque, ut G,ad F,hoc eſt,ut C, ad D,ita I,ad B: Eſt autem & H, ad I,ut C,ad D; quod C,& D,ipſum G, multiplicantes fecerunt ex conſtructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C,ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I,cadunt continue proportionales. Quoniam uero, exiſtentibus A, H,I, B,continue proportionalibus, numerus A,ad B,triplicatam habet rationem eius, quam habet A,ad H; triplicatam quoque rationem habebit A,ad B,cubus ad cubum, eius, quam habet C,ad D,latus ad latus; cũ ſit C, ad D,ut A, ad H. Quã ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.

17. ſeptimi

17. ſeptimi

18. ſeptimi

SCHOLION.

HIC quoque manifeſtum eſt,inter duos cubos cadere duos numeros

numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

EODEM *modo conſtat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo et ipſum H, quod H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem. Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum vero triũ H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.*

A, 27.	H, 36.	I, 48.	B, 64.
	E, 9	G, 12.	F, 16.
	C, 3.	D, 4.	

12. ## THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT

Sint continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & ruſum multiplicantes ipſos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue eſſe proportionales. Multiplicantes A, & B, ſe mutuo faciant N; & B, C, ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. ℞, 2048. M, 4096.

modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, ℞. Quoniam igitur A, multiplicans ſeipſum, & B, fecit D, & N; erit ut A, ad B, ita D, ad N. *17. ſeptimi* Eodem modo, quia B, multiplicans A, & ſeipſum, fecit N, & E; erit etiam, ut A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; erit ut B, ad C, ita E, ad O. *17. ſeptimi* Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit, ut B, ad C, ita O, ad F; proptereaque & E, O, F, continue proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua E, O, F, erit ex æquo D, ad E, ut E, ad F; atque adeo D, E, F, continue proportionales ſunt.

Deinde, quia A, multiplicãs D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H. *17. ſeptimi* Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; erit ut B, ad C, hoc eſt, ut A, ad B, ita S, ad I; proptereaq; *18. ſeptimi*

& H,

& H, R, S, I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem con-

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256 I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64 X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024, R, 2048. M, 4096.

tinuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

SVNT autem, ut ex demonſtratione liquet, numeri primo producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri ſecundo geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D. E, F; & in hos ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M. Dico D, F, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nam

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. E, 16. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

ex ſcholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue ſunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, uel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione

A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

Ex qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primum productos eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo vero procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius elicitur ex 1. theor. ſcholij propos. 10. huius lib.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propos. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eandem tamen propoſitionem demõſtrabimus, etiãſi plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quã tres A, B, C, D, continue proportionales, qui ſe ipſos multiplicantes faciãt E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps.

A, 2.	B, 4.	C, 8.	D, 16.
E, 4.	F, 16.	G, 64.	H, 256.
I, 8.	K, 64.	L, 512.	M, 4096.

Quoniam igitur E, F, G, ex demonſtratis, proportionales ſunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc eſt, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſe ipſos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodẽ modo producti.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratũ B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, ut

vtliquet ex demonſtratione propos. 11. huius lib. A,E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; metietur quoque A, primus ſecundũ E. Quare cum ſit ut A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

7. octaui. A,4. E,12. B,36.
C,2. D,6.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, ut C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, ut demonſtratum eſt propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerũ metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

14. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonſtratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, ut A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

7. octaui

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubũ metiri

metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, ut oſtenſum eſt propos. 12. huius lib. Quapropter metiente C, latere latus D, metietur & A, ipſum H; ac idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neq; latus unius metietur alterius latus. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; metietur & quadratus A, quadratum B. 14. octaui Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metietur latus D.

A, 16.	B, 81.
C, 4.	D, 9.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; metietur quoque C, latus illius D, latus huius. 14. octaui Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cũ ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur. *15. octaui.*

A,8. B,27.
C,2. D,3.

Sed iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat. *15. octaui.*

SCHOLION.

Proxime antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiã modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi unius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si uero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus

dratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

Nam ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde 14. & 15. *latus C, lateris D, multiplex erit.* octaui.

Qvod ſi latus C, lateris D, multiplex ſit; metietur latus D, latus C. Igitur & B, ipſum A, quadra- 14. & 15. *tus quadratum, & cubus cubum metie-* octaui. *tur; Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

A, 36.	B, 9.
C, 6.	*D*, 3.
A, 64.	B, 8.
C, 4.	*D*, 2.

At vero ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex; nõ metietur B, ipſum A, quadratus quadratũ, aut cubus cubũ. Igitur neque latus D, latus 16. & 17. *C, metietur. Quare C, latus lateris D, non* octaui. *erit multiplex.*

A, 49.	B, 9.
C, 7.	*D*, 3.
A, 125.	B, 8.
C, 5.	*D*, 2.

Similiter ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex; non metietur D, latus latus C. Igitur nec B, ipſum A, qua- 16 & 17. *dratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A,* octaui. *ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

THEOR. 16. PROPOS. 18. 16.

DVORVM ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius uero illis proportionalia E, F, ita ut C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo ſe multiplicantes faciant B; ſitque ut C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere unum numerum medium proportionalem, &

proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterũ homologorum C, F, uel D, F. Multiplicantes ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, ut E, ad F; erit permutando C, ad E, ut D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, ut C, ad E, hoc eſt, ut D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit quoque G, ad B, ut D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, uel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

17. *ſeptimi*

A, 12.	G, 18.	B, 27.	
C, 6.	D, 2.	E, 9.	F, 3.

Qvia uero, exiſtentibus A, G, B, continue proportionalibus, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, uel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, uel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Qvia oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, uel D, F, aſſumptorum.

Constat *etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, ut C, ad E, uel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, uel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit A, ad G, ut C, ad E, uel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare*

re cum & E, F, latera ſuum planum B, metiãtur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F, ideoque erunt inter ſe compoſiti.

Ex qua demonſtratione etiã manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius uero illis proportionalia F, G, H, ita ut ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, uel D, G, uel E, H. Multiplicantes ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum ut C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam uero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; erit ut C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; erit quoque ut D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione la- 17. *ſeptimi*

A, 30.	M, 60.	N, 120.	B, 240.
	I, 6.	L, 12.	K, 24.
C, 2. D, 3 E, 5.			F, 4. G, 6. H, 10.

 terum

terum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit ut E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M; erit A, ad M, ut I, ad L, hoc eſt, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H.

A, 30.	M, 60.	N, 120.	B, 240.
I, 6.	L, 12.	K, 24.	
C, 2. D, 3. E, 5.	F, 4. G, 6. H, 10.		

17 *ſeptimi*

Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; erit N, ad B, ut L, ad K, hoc eſt, ut C, ad F, uel D,
18. *ſeptimi* ad G, uel E, ad N. Eſt autem & M, ad N, ut E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

QVONIAM uero, exiſtentibus A, M, N, B, proportionalibus continue, proportio A, ad B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, uel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

EX ijs, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M, N, & utrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos: Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, uel E, ad H; hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes

quentes conſequentem; ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem; quod ſit N, ad B, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L; metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K, ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I. Igitur & C, D, ex pronunciato 11. metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nempe latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, ut C, ad F, uel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipſum M, conſequentes cōſequentem. Metiuntur uero & F, G, H, ipſum N, (cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quod A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam L, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam E, quam G, quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At vero F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorū M, N, B.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D, & E, minimi in ra

tione A,C,B. Quia igitur D,E, minimi ſunt in ratione A,
21 *ſeptimi* ad C; metientur D, & F, ipſos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipſos C, & B: metiantur per G. Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F,

9. *pron.*

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

17. *ſeptimi* & G, fecit C, & B; erit, ut C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E: Igitur erit ut D, ad E, ita F, ad G; & permutando ut D, ad F, ita E, ad G. Quoniam uero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, nempe D, ad F, ut E, ad G; erunt ex defin. A, B plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros unus, &c. Quod demonſtrandum erat.

19. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

Cadant inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter
20. *octaui* E, & G, medius cadit proportionalis F; erunt E, & G, plani ſimiles. ſint ipſius E, latera H, I; ipſius uero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, minimi in ratione A, C, D, exiſtentes, æque metiuntur ipſos A, C, D, eiuſdem rationis cũ illis; metiantur per M. Eodemque modo, quia E, F, G, æque metiuntur C, D, B, eandẽ habentes

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

21. *ſeptimi.* A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

habentes rationem cum illis; metiantur per N; ita ut M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus eſt autem E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B ſolidus etiam, latera habens K, L, N. Quia uero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, ut oſtendimus; erit C, ad D, ut M, ad N: Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F, quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipſos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem quam H, K, uel I, L; Etenim inter planos ſimiles E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll propos 19. huius lib in ratione laterum homologorum H, K, uel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L ut M, ad N; & permutando H, ad I, ut K, ad L; & I, ad M, ut L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B: Quam ob rem, ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

9. pron.
18. ſeptimi
17. ſeptimi

SCHOLION.

Dvo exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, vnitatem E, eſſe planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B. Hoc autem eſt abſurdum, cũ Euclides propoſitionem generaliter proponat, demonſtretque ſine vlla exceptione.

THEOR. 21. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales,

nales; primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324.

20. octaui

21.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; erũt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quam ob rem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

21. octaui

SCHOLION.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcedentium duarum propoſitionũ; quam qui diligenter examinare uelit, inueniet ſane mancam eſſe, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21 lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibuſdam lateribus unius proportionalia ſint quædam alterius; Iure optimo

quis

quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus, ſatis eſt, ut duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſit, immo omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt, inter ſe quoque æqualia, atque adeo eſſe quadratum: quemadmodum etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9. uel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles, cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, nempe & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur modum.

SINT *tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A, ex ſcholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nempe unus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. ſcholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, nimirum unus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E, C. numeri ſunt continue proportionales; producetur C, ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.*

A,36. B,48. C,64.
D,6. E,8.
Vnitas.

ALITER. *Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F, ipſum*

ſum

ſum C, æque, ex ijs, quæ oſtendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. ſunt quadrati: Eſt autem & A, quadratus, ex hypotheſi; cadet inter A, et D, quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero eſt, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nempe H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; metietur idem & ſecundum H.

A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
11. octaui. D, 9. E, 12. F, 16.
L, 6. K, 8. I, 4.

8. octaui. 7. octaui. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerũ K, quoties F, ipſum H, ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipſius K.

11. octaui Itaque quia ratio L, ad F; quadrati ad quadratum, duplicata eſt rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc eſt, H, ad F: Eſt autem & ratio C, ad F, eiuſdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod conuertendo ſint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ut C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales ſunt. Exiſtente ergo L, quadrato, ex conſtructione, & C, quadratus erit.

20. octaui ALITER. Quoniam A, & C, ſimiles plani ſunt; ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A; at F, G, ipſius C, ita vt ſit D, ad E, ſicut F, ad G: aſſumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in ſe; erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo ſit F, ad G, vt D, ad E, cadatque inter D, & E, medius proportionalis H; cadet quoque inter F, & G, unus medius proportionalis, qui ſit I.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
20. ſeptimi D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
8. octaui D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

20. ſeptimi Quare cum F, I, G, ſint continue proportionales; idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione.

SINT rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in ſeipſum

ſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertẽdo proportionales quoq; erũt numeri A, F, E, & vnitas.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
Vni. tas.

Itaque cum inter numerum D, & vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue ſunt proportionales; fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propoſ. 10. huius lib. a nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione, cuius latus G.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D; metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, æque, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demõſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorũ, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi; cadent inter E,

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

A, cubos duo medij proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, metietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P, ad H, ut D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus

Margin notes: 12. octaui; 8. octaui; 7. octaui; 12. octaui

cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit.

SIT A, ad B, ut C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratum. Cum enim ſit A, ad B, ut C, ad D; cadat autem inter C, & D, quadratos unus medius proportionalis, nempe E; cadet quoque inter A, & B, medius unus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continue proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

11. octaui

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

8. octaui

22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cū primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtente quadrato, eſſet & 8, quadratus; Igitur & 16. & 32. &c. quod eſt abſurdum.

24. octaui

24. octaui

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum,

merum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

Sit A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum: ſitque A, cubus. Dico & B cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, ut C, ad D; cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, nimirum E, F; 12.octaui

A,8.	G,12.	H,18.	B,27.
C,64.	E,96.	F,144.	D,216.

cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt cōtinue proportionales, & A, primus eſt cubus; erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat. 8.octaui 23.octaui

CORALLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus. 25.octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani ſimiles A, & B. Dico eſſe ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratū. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles, cadet inter eos unus medius proportionalis, uidelicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi 18.octaui

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

tremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, ut D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, ut eſt quadratus aliquis, nempe D, ad quadratum alium, ut ad F. Ergo ſimiles plani numeri rationẽ inter ſe habent, &c. Quod demonſtrandum erat.

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

SCHOLION.

FACILE etiam demonſtrabimus conuerſum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter ſe, quã quadrati C, D. Dico A, B, eſſe planos ſimiles. Quoniam inter quadratos C, D, cadit vnus medius 11. octaui *proportionalis: Et eſt, vt C, ad D, ita A, ad B; cadet quoque medius proportio-* 8. octaui *nalis inter A, & B. Quare A, & B,* 20. octaui *plani ſimiles ſunt.*

A,8.	B,18.
C,16.	D,36.

EX hoc perſpicuum eſt, planos numeros, qui ſimiles non ſunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratũ. Si enim haberent; eſſent, vt modo demonſtratum eſt, plani ſimiles. quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

25.
THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT ſimiles ſolidi A, B. Dico eſſe, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. 19. octaui Quia A, B, ſunt ſolidi ſimiles, cadent inter eos duo medij propor-

proportionales, qui ſint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo ſit A, ad B, vt E, ad H, conſtat ita eſſe A, ad B, ut eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, nempe ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLION.

CONVERSVM huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quã cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.

NVMERI A, B, proportionem habeant inter ſe, quam cubi C, D. Dico A, B, ſolidos eſſe ſimiles. Nam cum ſit A, ad B, vt C, ad D; cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; cadent quoque inter A, B, duo medij. Sunt ergo A, & B, ſolidi ſimiles. 12. octaui 8. octaui 21. octaui

A, 16,	B, 54.
C, 64.	D, 216

EX his omnibus perſpicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, uel ſeſquialteram, vel ſuperbipartiẽtem, eſſe ſimiles planos, vel ſolidos. Si enim eſſent ſimiles plani, caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri nõ poſſe iam dudum oſtenſum eſt in ſcholio propos. 8. huius lib. Eadẽ ratione non erunt ſimiles ſolidi, cum inter eos cadere non poſſint duo medij proportionales; Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non poteſt, quod hi vel ſola vnitate, vel certe binario tantum inter ſe diſtent, ut in ſcholio prædicto traditum eſt; inter quos certum eſt non poſſe intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales. 18. octaui 8. octaui

SIMILITER nec duo quiuis nnmeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poſſint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit numerus primus,

mus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quiuis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantum habet duas unitates, & ſe ipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horũ multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt ea non poſſe eſſe proportionalia.

*V*NDE facilis admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſeſquialteram, uel ſuperbipartientem, vel certe duo numeri primi, erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter uero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles, haberent pro-
26. octaui portionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur
24. octaui 16. quadrato, eſſet & 20. quadratus. quod eſt abſurdum. ponitur enim non quadratus.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. 40. Si
27. octaui enim eſſent ſolidi ſimiles, haberent proportionem, quam cubus
25. octaui ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, eſſet & 40. cubus. quod eſt abſurdum. ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS
ELEMENTVM IX.

THEOR. 1. PROPOS. 1. I.

SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVo numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles, unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut ſint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitque primus D, quadratus, ex conſtructione; erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.

17. ſeptimi — *18. octaui* — *8. octaui* — *22. octaui*

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

Dvo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratũ.

A,6. B,54.
17. ſeptimi D,36. C,324.

Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter D, & C, quadratos
11. octaui unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter A, & B,
8. octaui. unus medius proportionalis cadet. Ac propterea A, & B,
20. octaui ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Ex his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I. Si duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

A,4. B,25.
C,100.

Dvo quadrati A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe quadratum. Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, nempe quadrati; erit C, ex eis productus, quadratus.
1. noni.

II. Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Dvo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; ſitque A, quadratus.

A,9. D,12. B,16.
C,144.

Dico & B, quadratum eſſe. Cum enim A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; erunt
2. noni. *A, & B, ſimiles plani: atque adeo inter eos unus medius ca-*
18. octaui *det proportionalis, nempe D. Quare A, exiſtente quadrato,*
22. octaui *erit & B, quadratus.*

III. Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant

ciant non quadratum; alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; ſitque A, quadratus. Dico B non quadratum eſſe. Si enim B, dicatur eſſe quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius ſcholij; Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur quadratus eſt B, numerus.

A, 4. B, 20.
C, 80.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit. IIII.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non eſſe quadratum. Nam ſi C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, ſitque A, quadratus; eſſet & B, ex theor. 2. huius ſcholij, quadratus: Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, ſe ipſum multiplicans numerum B. Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D, & idcirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicans fecit D; metietur C, ipſum D, per C: 7. pron. Metitur autem & unitas ipſum C, per C. 5. pron. Igitur eadem pars eſt unitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nempe denominata a C; Ac

A, 8.
E, 16. D, 4.
F, 32. C, 2.
B, 64. Vnitas.

 proinde

20. *defin.* proinde ut unitas ad C, ita C, ad D. Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A; metietur D, ipſum A, per C. Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A; ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: ſed ut C, ad D, ita erat unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter unitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. At quia A, ipſum B, metitur per A, quod A, ſe ipſum multiplicans fecerit B; metitur uero & unitas ipſum A, per A: Eadem erit pars unitas ipſius A, quæ A, ipſius B; Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter unitatem & numerū A, cadant duo medij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continue proportionales; & A, primus ſit cubus; erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſe ipſum multiplicans, &c. Quod erat demonſtrandum.

7. *pron.* | 20. *defin.* | 7. *pron.* | 5. *pron.* | 20. *defin.* | 8. *octaui* | 23. *octaui*

A, 8.		
E, 16.	D, 4.	
F, 32.	C, 2.	
B, 64.	Vni-tas.	

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D; eritq; D, cubus. Quoniam uero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D ad C. At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; Ac propterea D, exiſtente cubo, & C, cubus erit. Quo circa ſi cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

3. *uoni.* | 17. *ſeptimi* | 12. *octaui.* | 8. *octaui* | 23. *octaui*

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C, Dico & B, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C; At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent; Ac proinde exiſtente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrẽ ſi cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

3. noni. 17. ſeptimi 12. octaui. 8. octaui. 23. octaui

SCHOLION.

Ex his & hæc, quæ ſequuntur, facile demonſtrabuntur, videlicet.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit. I.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non eſſe cubum. Si enim C, ſit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur. 5. noni.

A, 8.	B, 20.
	C, 160.

SI cubus numerus numerum quendã multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. II.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non eſſe cubum. Si namque B, ſit cubus; & factus C, cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. 4. noni.

A, 8.	B, 17.
	C, 136.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat: Et ipſe cubus erit.

MVLTIPLICANS ſe ipſum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum eſſe. Fiat ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in ſe faciat B, & ipſe C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter ęqualis ſit, ut perſpicuum eſt ex ijs, quæ ad definitionem cubi ſcripſimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A, cubus. Quare ſi numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat; &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

5. noni.

SCHOLION.

ALIAM demonſtrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Poſtquam enim demonſtrarunt C, factum ex A, in B, eſſe cubum, inferunt: Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. Quoniam uerò eſt vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipſos B, & C, fecit; cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales; Atque adeo exiſtente B, cubo, & A, cubus erit. Verum noſtra demonſtratio breuior eſt, & planior, ut perſpicuum eſt.

A, 8. B, 64. C, 512.

12. *octaui*
17. *ſeptimi*
8. *octaui*
23. *octaui*

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus ſolidus erit.

NVMERVS compoſitus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, eſſe ſolidum. Cum enim A, ſit

A, ſit compoſitus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis: metiatur D ipſum A per E. Quo poſito, multiplicante D, ipſum E, producetur A Cum ergo B, ipſum A, multiplicans fecerit C, procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea ſolidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter ſi compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum. 13. *defin.* 9. *pron.*

A,6. B,11. C,66.
D,2. E,3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus eſt, & unum intermittentes omnes: Quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus uero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab unitate cōtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertiū quidē B, ab vnitate eſſe quadratum, & unū intermittentes

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049, L,177147. M,531441.

omnes, quales ſunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt F, I, M: ſeptimum uero F, cubū ſimul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam eſt unitas ad A, ut A, ad B, æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; Metitur autem unitas numerum A, per A. Ergo & A, ipſum B, per A, metietur; Atque adeo A, multiplicans A, ipſum B, producet. Quare B, 5. *pron.* 9. *pron.*

quadratus eſt. Quia uero tres deinceps proportionales ſunt B, C, D; & eſt B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem 22. octaui ratione aſſumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, ſit quadratus, & F, quadratus erit; Nec non & omnes unum intermittentes.

RVRSVS quia eſt unitas ad A, ut B, ad C; æque metietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C. Me-

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049. L,177147. M,531441.

5. pron. titur autem unitas ipſum A, per A. Igitur & B, ipſum C,
9. pron. per A, metietur; atque adeo B, ipſum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, ſe ipſum multiplicans faciat B, multiplicans uero B, faciat C, ut eſt oſtenſum; erit C, cubus. Quia uero quatuor deinceps proportionales 23. octaui ſunt C, D, E, F, & eſt C, cubus; erit & F, cubus. Eodem argumento aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, ſit cubus; & I, cubus erit; atque omnes ſemper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, ſeptimus ab unitate oſtenſus eſt & quadratus, & cubus: ipſe erit cubus ſimul & quadratus: Atque eodem modo M, ſeptimus ab F, intermiſſis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit ſimul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, undecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autẽ, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, deci-

mo-

moquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimus ſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes uero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimo octauo, uigeſimo quarto, & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, uigeſimusquintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper unum intermittunt poſt tertium ab unitate: At ſecundi ordinis numeri omitttunt ſemper duos numeros poſt quartum ab unitate. Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt vnitatem ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus unita-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ti quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittẽtes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, iam demonſtratũ eſt. Quod uero 8. noni.

8. *noni.* uero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuũ fiet. Cum tres continue proportionales ſint A, B, C; ſitque

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

22. *octaui* A quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, ſit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, E, F, quadrati ſunt. Idem oſtendemus, ſi plures numeri ſint continue proportionales.

SIT iam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

8. *noni.* intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit unitas ad A, ut A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur,
5. *pron.* & A, ipſum B, per ſe ipſum metietur; Atque adeo cubus A,
9. *pron.* ſe ipſum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cu-
3. *noni.* bus eſt. Quoniam uero quatuor continue proportionales
23. *octaui* ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus; & D, cubus erit. Eademq; ratione aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus ſit, & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus omnes cubos eſſe, ſi plures continue proportionales fuerint. Quocirca, ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt unitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua uero parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui

reliqui omnes quadrati erunt, vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt unitatẽ, non ſit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatẽ, non ſit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F, G, H, I; & primum A, proximus unitati non ſit quadratus. Dico nec alium ullum eſſe quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, nempe præter B, D, F,H. Si enim præter hos alius

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16 E,32. F,64. G,128. H,256. I,512.

eſt quadratus, ſit quadratus E. Cum ergo & D, ſit quadratus, ſitque ut D,ad E, uel E,ad F,ita A, ad B; & conuertendo ut E,ad D,uel F,ad E, ita B,ad A; habebit B,ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D,uel quadratus F,ad quadratum E: ſed B, tertius ab unitate eſt quadratus. Igitur & A,primus ab vnitate quadratus erit. Quod eſt abſurdum: ponitur enim A,non quadratus. Non ergo E, quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus nullum alium, præter dictos, quadratum eſſe. 8. noni. 8. noni. 24. octaui

SED iam A, proximus unitati non ſit cubus. Dico nec alium ullum eſſe cubum, præter quartũ ab unitate, & duos intermittentes omnes, uidelicet præter C,F, I. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D,cubus. Cum ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo ut D,ad F,ita A,ad C, (quod tres 8. noni.

D,E,

D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo ut F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: Sed C, eſt cubus, nempe

8. noni.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

25. octaui quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab unitate cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; cum & C, cubus ſit, ſitque

8. noni. ex æquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo, erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt.

25 octaui Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoque eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Non eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab unitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab unitate cubo ſimul, & quadrato.

Sit enim primum A, qui poſt unitatem, cubus quidem, nõ autem ſimul & quadratus. Dico B, tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem,

Vnitas. A, 8. B, 64.

9. noni. *quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſunt; quadratum uero,*

8. noni. *quod tertius ſit ab unitate.*

Sit deinde A, poſt unitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubum ſimul & quadratum; Cubum quidem, quod quartus ſit ab unitate; quadratum uero,

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

8. noni.

9. noni. *quod primo exiſtente quadrato, omnes ſunt quadrati.*

Sit poſtremo A, poſt vnitatem neque cubus, neque quadratus.

dratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratū, præter ſeptimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

enim primo non exiſtente quadrato, nullus alius quadratus ſit, præter tertium ab unitate, & vnum intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt, vt in ſcholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, ſeptimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusſeptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non exiſtente cubo, nullus alius ſit cubus præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales ſunt, ut ex eodem ſcholio apparet, quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. perſpicuum eſt, tantummodo ſeptimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos eſſe ſimul, & cubos, & ſic de cæteris. Nam in hæc loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, ut liquido conſtat ei, qui recte propoſitionem hanc & octauam huius libri expenderit. 10. noni. 10. noni.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris.

SINT ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorē, ut

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

C, quemlibet maiorem, ut G, metiri per aliquem numerorū A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D; (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem cum unitate & numeris A, B, C, D,) æque metietur unitas numerum D, atque numerus C, numerum 11. 20. defi

5. pron. merum G: Sed unitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit ut E, ad F, ita unitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo ut A, ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo: Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, ut ex demonſtratio-

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

ne apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nempe per ſe ipſum, &c.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab unitate. Si vero minor aliquis maiorem quempiã multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtat, quantum minor ab ab vnitate; propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, producatur ille, quem metitur. 9. pron. *Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.*

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque pri

morum

morum numerorum ultimum metiuntur, ijdem & eum, qui unitati proximus eſt, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A. Si namque non metitur ipſum A; erit E, cum primus ſit, ad 31. ſeptimi
A, primus.

Metiatur autem E, ipſum D, per

Vnitas.	A,10.	B,100.	C,1000.	D,10000.
	E,5.	H,20.	G,200.	F,2000.

F,atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia uero & A, 9. pron.
ipſum D, metitur per C, ac proinde A, multiplicans C, facit
D, ut in ſcholio præcedentis propos. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E,
ſecundo in F, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, ſe- 19. ſeptimi
cundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, &
E, ſint inter ſe primi; metietur æque A, ipſum F, & E, ip- 21. ſeptimi
ſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia uero & A, ex ſcholio eodem, me-
titur C, per B, atque adeo A, multiplicans B, facit C; pro- 9. pron.
creabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum. &
ex E, ſecundo in G, tertium. Erit igitur ut A, primus ad E, 19. ſeptimi
ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cũ
A, & E; ſint inter ſe primi; metietur æque A, ipſum G, & 21. ſeptimi
E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B, per H, ita ut E, multi- 9. pron.
plicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A,
ac idcirco A, ſe ipſum multiplicans facit B, ut ex eodem ſcholio apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex A, medio
in ſe, & ex E, primo in H, tertium. Quare erit ut E, pri-
mus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium; atque 20. ſeptimi
adeo, cũ E, & A, inter ſe primi ſint, æque metietur E, ipsũ A, 21. ſeptimi
& A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum

ſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metitur ergo E, ipſum A. Eodem argumẽto oſtendemus, quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes, metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, uel B, ultimus numerus ſtatuatur. Si igitur ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico, & E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur; erit
31. *ſeptimi* E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſe ipsũ multiplicans facit B, ut apparet ex ſcholio propos. præceden-

Vnitas. A,6. B,36 C,216. D,1296.
E,3.

27. *ſeptimi* tis; erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt, fit autem C, ex A, in B, per idem ſcholion; erit C, ad
26. *ſeptimi* E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt, & fit D, ex A, in C, per idem ſcholiõ; erit D, ad
26. *ſeptimi* E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt cõtra hypotheſim. Metitur ergo E, ipſum A.

SCHOLION.

EST autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod uidetur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alÿs nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe; Quod arbitror eum non dicturum fuiſſe, ſi diligentius uim huius demonſtrationis expẽdiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaßet; quãdoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiam demonſtrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum.

CAETERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunque

cumque numerũ primũ, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. Cum enim metiatur proximum vnitati; 12.noni
hic autem omnes ſubſequentes, quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt nu- 11.noni
meris; manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.

THEOR. 13. PROPOS. 13. 13.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem, primus ſit; Maximũ nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum ergo eſt E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, &
metiatur extremum D; metietur quoque ipſum A, unitati 12.noni
proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E—— H—— G—— F——

E, primus eſt, ſed compoſitus; atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe non poſſe, 33.ſeptimi
præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur
E; cum E, metiatur extremum D; metietur quoque ille 11.pron.
alius primus eundem D, atque adeo & ipſum A, primum 12.noni
exiſtentem, nimirum unitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; & uiciſſim aliquis ipſorum A, B,
C, (nempe is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, 8.pron.

 per

11. noni per E. Cum ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipſorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, nõ idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniam uero E, metitur D, per

8. pron. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E ----- H ---- G ---- F ----

F; metietur uiciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus. ſi enim ſit primus, & metiatur D, ultimũ;
12. noni metietur; & A, proximum unitati, qui primus eſt quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus;
33. ſeptimi atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F; cum F, metia-
11. pron. tur D, extremum; metietur quoque ille alius primus eun-
12. noni dem D, atque adeo & ipſum A, proximum unitati, qui primus eſt quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quã A, ipſum F, metitur. Iam uero quoniam E, metitur D, per
9. pron. F; fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in ſcholio propos. 11 huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, ter-
19. ſeptimi tium; Ac proinde erit ut A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Metitur autem A, ipſum E, ut oſtẽſum eſt: Ergo & F, ipſum C, metietur: Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, ultimum, (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter G, diuerſum eſſe ab A, B, & non primum, ſed compoſitum, quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

Si enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiaturq; F, ipſum C, per G; metietur utique F, ipſum C, per
8. pron. aliquẽ ipſorum A, B; & uiciſſim aliquis ipſorum A, B (nempe is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F. Cũ
11. noni ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorũ A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, qui aliquis ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum

rum A, B, ſed diuerſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; metietur uiciſſim G, ipſum C, per F. Non erit autẽ G, primus. Si enim primus ſit, metiaturque ultimum C; metietur quoque numerum primum A, unitati proximũ. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſitus; ac proinde eum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quã A, metiatur G; cum G, metiatur C, ultimum; metietur quoque ille alius primus eundem C, atque adeo & ipſum A, unitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipſum G, metitur. Iam uero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in ſcholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, ſecundo in G, tertium. Quare erit ut A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, ut demonſtratum eſt: Igitur & G, ipſum B, metietur: metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

8. *pron.* 12. *noni* 33. *ſeptimi* 11. *pron.* 12. *noni* 9. *pron.* 19. *ſeptimi*

NAM ſi H, idem ſit qui A; metiaturque G, ipſum B, per H; metietur utique G, ipſum B, per A; Et uiciſſim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipſum B, per A, ut conſtat ex ſcholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem qui A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus Iam uero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, ut in ſcholio dicto docuimus, Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. Quare erit ut H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium. At A, metitur ipſum G, ut eſt demonſtratum: Igitur, & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare exiſtente A, primo, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C: Ac proinde ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

8. *pron.* 9. *pron.* 20. *ſeptimi*

14. ## THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus a B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per

A . . . .
B. . . . C. . . . D. . . . .
E ---- F ----

9. pron. F; multiplicans E, ipſum F, faciet A. Quare ſinguli B, C,
32. ſeptimi D, alterum ipſorum E, F, metientur; non quidem ipſum E, primum exiſtentem, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

15. SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, compoſitus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D,

C, D, E; in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F; G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nempe A. Dico H, compoſitum eſſe vel ad F, vel ad G. Sumantur enim in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot vno minus, quot 2. octaui

A,16.	B,24.	C,36.	D,54	E,81.
	M, 8.	N, 12	O,18.	P,27.
		I,4.	K,6.	L,9.
H ——			F,2.	G,3.

ſunt ipſi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipſum A; erit H, compoſitus, ex ſcholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi uero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut conſtat ex demonſtratione propos. 2 lib. 8. erit, ex ſcholio dicto, rurſus H, compoſitus uel ad F, vel ad I. ſi ad F, habetur propoſitũ; ſi vero ad I, cum I, gignatur ex F, in ſe ipſum; erit H, compoſitus ad F, ex dicto ſcholio

DEINDE *metiatur H, ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit ut prius H, compoſitus vel ad F, uel ad N. ſi ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad N, qui quidem fit ex F, in K; erit H, eodem modo compoſitus vel ad F, uel ad K. ſi ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compoſitus uel ad F, vel ad G.*

RVRSVS *metiatur H, tertium C, qui cum fiat ex F, in O; erit H, compoſitus uel ad F, uel ad O. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L. ſi ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum L, gignatur ex G, in ſe; compoſitus quoque erit H, ad G.*

PRAETEREA *metiatur H, quartum D, qui cum fiat ex F, in P; erit H, compoſitus vel ad F, uel ad P. ſi ad F, habetur propoſitum; ſi uero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compoſitus uel ad G, uel ad L. ſi ad G, habetur propoſitum; ſi uero ad L, cum L, producatur ex G, in ſe; erit quoque H, ad G, compoſitus.*

EODEM *modo ſi H, metiatur vltimum E, oſtendemus H, compoſitum eſſe ad G; atque ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.*

ITAQVE ſi H, metitur primum A; erit H, compoſitus ad F: Si vero ſecundum B, metitur; erit compoſitus uel ad F, vel ad G: Si denique metitur tertium C, vel quartū D, vel quē cunque alium inſequentem; compoſitus erit H, ad G. Id quod perſpicue ex demonſtratione apparet.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis ſecundo libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM in theoremate ſequente demōſtrando theon quædam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo, tanquam ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa; non alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe a nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

I. SI fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem eſſe numeris GH, H I, I K, hoc eſt, toti numero G K, ex G H, H I, I K, compoſito. Quoniam C, multiplicans A B, fecit F;

A . . . D . . E . B . . C . .
F . . . .
G . . . . . . H . . . . I . . K

7. pron. *metietur A B, ipſum F, per C; hoc eſt, A B, pars erit ipſius F, denominata a C. Eadem ratione A D, ipſius G H; nec non*

DE,

D E, ipſius H I; & E B, ipſius I K, pars erit a C, denominatâ, nempe eadem quæ A B, ipſius F. Quia uero, per ea quæ ad propoſ 5. lib. 7. demonſtrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars eſt, quæ A D, ipſius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipſius F; Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & G K. Quod eſt propoſitum. 4. pron.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui a toto efficitur. II.

NVMERVS A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirũ quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex A B, in A C, & in C B, quod eſt propoſitum.

D . . . . . .

A . . . . C . . B

IDEM demonſtrabitur, ſi A B, in plures partes, quam in duas ſecetur, vt ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex A B, in A B, nempe quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex A B, in ſingulas partes A C, C D, D B.

E . . . .

A . . . . C . . . D . . B

Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & una parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur. III.

SIT numerus A B, diuiſus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C.

Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis ſit; erit ex 1 theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A C, in A B; vel (quod idem eſt) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex A C, in C B, & ex D, hoc eſt, ex A C, in A C, quadrato ſcilicet ipſius A G. Quod eſt propoſitum.

D . . . . .
A . . . . . C . . . . B

IIII. Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui a partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

Sit numerus A B, diuiſus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum æqualem eſſe quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius A B, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex A B, in A C, & in C B. Eſt autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, æqualis numero genito ex A C, in C B, una cum quadrato ipſius A C: Item numerus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipſius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . . C . . . . B

V. Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Nvmervs A B, ſecetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerũ ſub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, una cum quadrato numeri intermedij

medij C D, eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius C B, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C D, D B, vna cum plano numero bis comprehenſo ſub

A . . . . . C . . . D . . B

C D, D B; numero vero comprehenſo ſub C D. D B, una cum quadrato ipſius D B, æqualis ſit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in DB; erit numerus quadratus ipſius C B, æqualis etiam reliquo quadrato ipſius CD, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, & numero ex C B. hoc eſt, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis eſt numerus, qui fit ex A D, in D B. Igitur quadratus ipſius C B, æqualis erit quadrato ipſius CD, una cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc eſt, numerus factus ex A D, in D B, vna cum quadrato ipſius C D, æqualis eſt quadrato ipſius CB. Quod eſt propoſitũ.

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS *A B, ſecetur in partes æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, in adiectum B D, una cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem eſſe quadrato, qui*

A . . . . C . . . . B . . D

fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C B, BD, vna cum numero bis comprehenſo ſub CB, B D, hoc eſt, una cum numeris ſub C B, B D, & ſub AC, BD, comprehenſis; numeris autem contentis ſub C B, BD, & ſub A C, B D, & ſub B D, B D, hoc eſt, quadrato ipſius B D, æqualis ſit, ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; erit quadratus ipſius C D, æqualis reliquo quadrato ipſius C B, una cum numero facto ex A D, in B D; hoc eſt, numerus factus

ex

ex A D, *in* B D, *una cum quadrato ipſius* C B, *æqualis eſt quadrato ipſius* C D. *Quod eſt propoſitum.*

VII. SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis eſt numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico quadratum totius* A B, *vna cum quadrato partis* C B, *æqualem eſſe numero bis, qui fit ex toto* A B, *in dictam partem* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C.

A . . . . . C . . . B

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius A B, *æqualis ſit quadratis partium* A C, C B, *una cum numero, qui fit bis ex* A C, *in* C B; *ſi quadratus ipſius* C B, *addatur communis; erunt quadrati numerorum* A B, C B *ſimul, æquales quadratis numerorum* A C, C B, C B, *vna cum numero qui fit bis ex* A C, *in* C B. *Atqui ei, qui fit ex* A C, *in* C B, *una cum quadrato ipſius* C B, *æqualis eſt, per 3. theorema, numerus qui fit ex* A B, *in* C B; *Ac proinde ei, qui fit bis ex* A C, *in* C B, *vna cum quadrato ipſius* C B, *bis, æqualis eſt, qui fit bis ex* A B *in* C B. *Igitur quadrati numerorum* A B, C B, *ſimul, æquales ſunt numero, qui fit bis ex* A B, *in* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod eſt propoſitum.*

VIII. SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

SECETVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico numerum, qui fit quater ex toto* A B, *in partem* C B, *vna cum quadrato reliquæ partis* A C, *æqualem eſſe quadrato numeri, qui ex toto* A B, *& prædicta parte* C B, *cõponitur.* *Addito enim numero* B D, *qui æqualis ſit di-*

A . . . . C . . . B . . . D

ctæ

ctæ parti C B; cum quadratus totius A D, compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vna cum numero qui fit bis ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum A B, C B, vna cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, vna cum quadrato numeri A C; Erit quadratus factus ex A D, æqualis numero, qui fit quater ex A B, in C B, vna cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. IX.

Divisus ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium A D, DB æquales quadratis partium A C, C D, D B; vna cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt, ex 7. theorem. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur quadrati partium A D, D B, æquales ſunt quadratis partium A C, C D, bis; Ac propterea quadrati partium A D, D B, dupli ſunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . C . . . D . . B

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul du- X.

pli

pli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

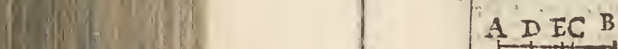
Sit numerus A B, diuiſus in partes duas æquales A C, C B, eique adÿciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adiecto B D, & quadratũ adiecti numeri B D, vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorum, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex

A....C....B..D

CD, compoſito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cum enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4 theorem. quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex CB, in C D; ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in CD. Sed per 7. theorema, quadrato ipſius B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in CD, æquales ſunt quadrati numerorũ C B, C D; & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur quadrati numerorum A D, B D, æquales ſunt quadratis numerorum A C, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, BD, dupli ſunt quadratorum, qui ex A C, CD, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.

Dividatvr, ſi fieri poteſt, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contentus ſub extremis A B,



C B, æqualis eſt quadrato numeri medÿ A C;
20. *ſeptimi* *erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Eſt autem A B, maior quam A C. Igitur & A C, maior eſt quam C B. Ablato iã CD, qui ipſi CB, ſit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad CD. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, eſt ut A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum;*
11. *ſeptimi* *erit quoque ut totus AB, ad totum A C, vel vt detractus A C ad*

ad detractum C D, ita C B, ex A B; reſiduus, hoc eſt, C D, illi æqualis, ad A D, ex A C, reſiduum. Quia igitur eſt vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & eſt A C, maior quam C D; erit quoque C D, maior quam A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia eſt, ut totus A C, ad totũ C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; erit quoque vt totus A C, ad totum C D, vel ut detractus CD, ad detractum DE, ita A D, ex A C, reſiduus, hoc eſt D E, illi æqualis, ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cum ſit vt C D, ad D E, ita D E, ad A C; ſit autem C D, maior, quam D E; erit etiam D E, maior, quam E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum; cum numerus non poſſit diuidi infinite. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, ut planus numerus ex toto in vnam partium factus; æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum. 11. ſeptimi

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuiſus eſt, vt is qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B,



in C B, vna cum quadrato ipſius A C, quincuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vna cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is qui quater continetur ſub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quã 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, ut conſtat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis

ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium: Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propos. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propos. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipſum E, facere B; atque E, ſe ipſum multiplicantem facere C.

A, 9 B, 12. C, 16.
D, 3. E, 4.

Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt;

24 ſeptimi erit & uterque D, E, ſimul ad

30. ſeptimi quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compoſitus ex D, E, quam ipſe D, ad E, primus ſit; erit quoque numerus

26. ſeptimi factus ex D, E, tanquam uno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E tanquam uno in D, æqualis eſt per 3 theorema ſcholij precedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſi-

27. ſeptimi ti, primi ſunt ad E; Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

Deinde quia, ut prius, uterque D, E, ſimul pri-

30 ſeptimi mus eſt ad quemlibet ipſorum D, E; efficitur (cum tam cõpoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D) numerum factum

B, 2. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

26. ſeptimi ex D, E, tanquam uno in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in E, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt; atque adeo ad ipſum A,

27. ſeptimi qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

Postremo quia, ut prius, uterque D, & E, ſimul

30. ſeptimi ad quemlibet ipſorum primus eſt; atque adeo e contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E;

26. ſeptimi erit quoque qui fit ex D, in E, ad compoſitum ex D, E, pri-

27 ſeptimi mus; Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E,

ex D, E, tanquã uno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theorema antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, una cum eo qui ex D, in E, bis: Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis.

A,9. C,16.
B,12.
D,3. E,4.

Quoniam ergo duo numeri ſimul, nempe compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorũ, ut ad eum, qui fit ex D, in E, ut oſtenſum eſt; Erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E; atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. 30. ſeptimi Rurſus quia duo numeri ſimul, uidelicet compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum; ut ad eum, qui fit ex D in E, primi ſunt, ut oſtenſum eſt; erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos; atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. 30. ſeptimi Cum igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erũt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

CAMPANVS hoc theorema aliter demonſtrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos; Videlicet A, B, C, ſimul ad D; & A, B, D, ſimul ad C; & A, C, D, ſimul ad B; & B, C, D, ſimul ad

ad A. Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe; atque adeo eos aliquis numerus communis menſura metietur. Metiatur eos numerus E, ſi fieri poteſt; ſumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E ----	F, 2.	G, 3.	H, ----

Quoniam ergo A, B, C,
D, continue proportionales ſunt, & minimi; metitur autem E,
aliquem eorum nempe D; erit E, compoſitus ad alterum ipſo-
rum F, G, ex ſcholio propos. 14. huius lib. Atque idcirco ipſum
E, & alterum ipſorum F, G, aliquis numerus metietur: Me-
tiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur meti-
ri compoſitum ex A, B, C, & ipſum D; metietur quoque H, eun-
11. pron. dem compoſitum ex A, B, C, & ipſum D. Quia vero H, metitur
quoque alterum ipſorum F, G; & tam F, quam G, medios nume-
11. pron. ros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. metietur quoque
10. pron. H, medios B, C; ac propterea, & compoſitum ex B, C. Itaque cũ
H, metiatur totum compoſitum ex A, B, C, & detractum compo-
12. pron. ſitum ex B, C, ut demonſtrauimus; metietur quoque idem H, re-
liquum A: Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A, D,
extremi minimorum A, B, C, D, inter ſe compoſiti. Sed & pri-
3 octaui mi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt, Non igitur cõpoſiti inter
ſe ſunt, cõpoſitus ex A, B, C, & numerus D. ergo inter ſe primi.

RVRSVS, ſi A, B, D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad
C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E,
qui rurſum ex ſcholio propos. 14. huius lib. compoſitus erit ad
alterum ipſorum F, G. Metiatur ergo H, ipſum E, & alterum
ipſorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compoſi-
11. pron. tum ex A, B, D; metietur etiam H, eundem compoſitum ex
A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F, G, qui me-
tiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C; metietur
11. pron. quoque H, ipſos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitũ
12. pron. ex A, B, D, & detractum B; metietur quoque H, compoſitum
ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G,
quorum F, ipſum A, & G, ipſum D, metitur, vt conſtat ex de-
11. pron. monſtratione propos. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipſo-
12. pron. rũm A, D. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi in-
3. octaui ter ſe compoſiti. Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non
poteſt. Non igitur A, B, D, ſimul compoſiti, ad C, com-
poſiti

poſiti ſunt. ergo primi. Quod eſt propoſitum.

NON *aliter oſtendemus & A, C, D, compoſitos, eſſe ad B, primos; nec non, & B, C, D, ſimul ad A.*

THEOR. 16. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe ut A, ad B, ita B, ad alium numerum: ſi enim fieri poteſt, ſit ut A, ad B, ita B, ad alium, nempe ad C. Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, atq; adeo in ſua proportione minimi; *23. ſeptimi* ipſi æque metientur numeros B, & C, *21. ſeptimi* in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C. Metitur autem & A, ſe ipſum: Igitur A, metitur ipſos A, B, primos inter ſe exiſtẽtes. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.
B.
C———————

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorũ primi inter ſe ſint: Non erit ut primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E

ut A, ad B, ita D, ad alium, uidelicet ad E: Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint

23. *ſeptimi* inter ſe primi, minimi in

A,8. B,12. C,18. D,27 E-----

ſua proportione. Igitur

21. *ſeptimi* æque metientur ipſos B, & E; nempe A, ipſum B, & D, ipſum E. Atqui eſt ut A, ad B, ita B, ad C: Ergo cū A, metiatur ipſum B; & B, ipſum C,

11. *pron.* metietur; atq; ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt ut B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipſum C; metietur &

11. *pron.* C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, metietur quoque ipſum D. Metitur uero & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D, inter ſe primos exiſtentes. Quod eſt abſurdum: Non ergo eſt ut A, ad B, ita D, ad alium numerū E. Eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, conſiderare an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

Dati duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſſit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerū, ut

A,4. B,7.

A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt inter ſe primi;

16. *noni* perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si uero non ſunt A, & B, inter ſe primi; multiplicans B, ſe ipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum A, ipſum C,

A,4. B,6. D,9. C,36.

per D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, immo ipſum D, eſſe tertiū proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D; fiet C, ex A, in D: Fit autem ex conſtructione, idem C, ex B, in

9. *pron.* ſe ipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis A, D, æqualis

lis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur; Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B. 20. ſeptimi

SED non metiatur A, ipſum C. Dico ipſis A, B, non poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri poteſt, inuentus ſit D; ita ut ſit A, ad B, quemadmodũ B, ad D. Quoniam igitur eſt, ut A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus ſub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe ipſum, hoc eſt, ipſi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipſum C, per D: ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C; productum ex B, ſecundo in ſe ipſum. Eadem uia conſiderabimus, an ipſis B, & A, inueniri poſſit alius tertius numerus, ad quem ita ſit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat. 20. ſeptimi 7. pron.

A,6. B,4. D---- C,16.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, ſiue deinceps proportionales, ſiue non; oporteatque conſiderare, an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit C, ad aliquem aliũ numerum, ut A, ad B. Multiplicans B, ipſum C, faciat D. Aut igitur A, ipſum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipſum D, per E. Dico ipſis A, B, C, inueniri poſſe quartum proportionalem, immo ipſum E, eſſe quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis A, E, continetur, æqualis eſt ei, qui ſub B, C, ſecundo, & ter- 9. pron.

A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.
A,4. B,8. C,9. E,18. D,72.

19. ſeptimi tio continetur; Ac propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus eſt E, ipſis A, B, C, quartus proportionalis.

Sed iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalẽ. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus ꝓportionalis E; ita ut ſit quemadmodũ A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt; erit nu-

A,4. B,6. C,9. E --- D,54.
A,4. B,4. C,10. E --- D,40.

19. ſeptimi merus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare cum D, fiat

7. pron. ex A, in E; metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur nõ metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, ut C, ad B. Quocirca tribus numeris datis cõſiderauimus, an poſſit, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Ex his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

Theon, & qui illum ſequuntur, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; Aut nõ deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quo nam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonſtrationibus uigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati nõ ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non

non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio ſit ſubdupla? Idẽ videri poteſt in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalem. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuum fiet, ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem. Si enim poteſt inueniri, ſit ille D, ita ut ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi, & ob id minimi. Igitur metientur æque ipſos C, E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E. At uero & A, ſe ipſum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter ſe exiſtentes. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

A,3. B,6. C,8. D,16. E ---

23. & 12. ſeptimi

HAEC eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, uidelicet ad E; quod quidem fieri poſſe nuſquam demonſtrarunt: Immo hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus hic inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, vt hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (ut cum dialecticis loquamur) in demõſtrando. Quin etiam, quotieſcunque quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus,

ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquã conceſſum, atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione ulla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, ut B, ſecundus ad C, tertium. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi utuntur.

S I N T *enim quatuor numeri* A, B, C, D, *proportionales, nõ tamen deinceps; ſintque* A, *&* C, *primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit* D, *ad alium numerum, quemadmodum* B, *ad* C.

A,4. B,12. C,3. D,9. E ----

Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, *ad* C, *ita* D, *ad* E. *Eſt ergo ex æquo, vt* A, *ad* C, *ita* C, *ad* E; *Atque adeo vt ipſi oſtenderũt, metietur* A, *duos* A, *&* C, *primos inter ſe. Quod eſt abſurdũ. Non ergo fieri poteſt, ut* D, *ad* E, *ſit, quemadmodum* B, *ad* C. *Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.*

P R I M V M *vero membrum perſpicue & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; manifeſtum eſt, ex demonſtratis,* 17. noni. *non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus.*

21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorũ.

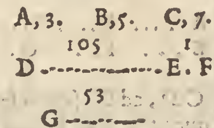
S I N T propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiantur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures ꝓpoſita multitudine A, B, C.

38. ſeptimi

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ------------ E . F

S E D iam non ſit primus D F. Metietur ergo eum aliquis

quis numerus primus, nempe G. Dico G, primum nulli ipſorum A, B, C, eundem eſſe. Si namque G, ſit idem, qui unus ipſorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipſum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatẽ. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui unus ipſorum A, B, C; Ac proinde inuenti ſunt primi numeri A, B, C, G, plures propoſita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; uia plures inuenientur quam A, B, C, G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat. 33. ſeptimi



SCHOLION.

POTERAT *idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.*

PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.

NAM *ſi primi quotcunque propoſiti ſint* A, B, C, *inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuerſum, nempe* DF, *ſi primus eſt, uel certe* G. A*tque eodem modo quatuor primis alium quintũ, & quinque primis alium ſextum inueniemus; & ſic deinceps primos numeros, quotcunq; quis uolet, inueniemus.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componãtur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri AB, BC, CD. Dico & totum compoſitum AD, parem eſſe. Cũ

enim AB, BC, CD, ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipſius A B; & F, ipſius BC; & G, ipſius C D. Quoniam igitur eſt ut A B, ad E; ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod ſemper ſit proportio dupla.) erit quoque ut A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, ſimul. Eſt autem AB, ipſius E, duplus. Igitur & totus A D, compoſiti ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compoſitum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . B . . . . C . . . . . . D
E . . . F . . G . . . . .

12. ſeptimi

23. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compoſitum A E, parem eſſe. Cum enim A B, B C, C D, D E, ſint impares; differet quilibet unitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compoſitus ex ipſis par erit. Eſt autem & multitudo unitatum detractarum par: Igitur & totus A E, compoſitus, par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . B . . . C . . . . . . D . . . . E

21. noni.

21. noni.

24. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: & totus impar erit.

QVOT-

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar eſt, A B, B C, C D, componantur. Dico & totũ A D, compoſitum, imparem eſſe. Cum enim impar numerus differat unitate a pari, ex definitione; ablata unitate E D, ab

A . . . . . B . . . C . . . . E . D

impari C D; erit reliquus C E, par: Eſt autem & A C, compoſitus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & A E, compoſitus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat.

22. noni.
21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem eſſe. Aut enim C B, par detractus dimidia pars eſt ipſius A B, aut maior quã dimidia pars, uel minor. Sit primum dimidia pars. Cum

A . . . . . . C . . . . . . B

igitur ipſi C B, pari æqualis ſit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

SED iam CB, par detractus maior ſit, uel minor, dimidia parte ipſius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; ſit D B, dimidia pars ipſius A B; & E B, dimidia ipſius C B. Itaque cum ſit ut A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando ut AB, ad CB, ita D B, ad EB; & diuidendo ut A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rurſusque permutando, ut A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipſius E B, duplus eſt: Igitur & A C, ipſius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, ſit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detraha-

A . . . . C . . D . . . E . . . . . B
A . . . . D . . . C . . E . . B

trahatur, &c. Quod erat oſtendendum.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim unitate C D, ex C B, reliquus ſit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit &

A.......C.D....B

24. noni. reliquus A D, par. Dempta ergo unitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem eſſe. Detracta enim D B, unitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur

A....C......D.B

24. noni. C D; erit & reliquus A C, par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim A D, unitate ex impare

A B;

A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus D C, par quoque erit; Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat. 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . . B

THEOR. 26. PROPOS. 28. 29.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot in A, ſunt unitates. Quare cum B, ſit par, cõponetur C, ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot ſunt unitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat. 21 noni.

A . . . B . . . .
C . . . .

SCHOLION.

EADEM demonſtratione oſtendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rurſus C, componetur ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . . . B . . . . .
C . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparẽ numerũ multiplicans fecerit aliquẽ. Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparē B, fiat C. Dico C, imparem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot ſunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, ſit impar; componetur C, ex imparibus ipſis B, æqualibus, quorum multitudo impar eſt, nempe æqualis multitudini unitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca ſi impar numerus imparem numerū multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . .   B . . . . .
C . . . .

23. *noni.*

EX CAMPANO.

31. NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

A . . .   C . . . .
B . . . .

29. *noni.* METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem eſſe. Nam ſi impar ſit; erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod eſt abſurdum, cū ponatur par. Eſt ergo C, par.

32. NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

A . . .   C . . . . .
B . . . .

28. *noni.* METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparē eſſe. Si enim ſit par; erit B, factus ex A, impari in C, parē par. Quod eſt abſurdum, cum impar ponatur. Eſt ergo C, impar.

33. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerū metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiū quoque ipſius B, metiri. Metiatur A, ipſum B, per C. Erit ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonſtra-

monſtrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C; metietur quoque C, ipſum B, per A; Ac 8. pron.
proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, ut ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam uero eſt ut C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B: Eſt autẽ C, pars ipſius B, denominata ab A, ut oſtenſum eſt; erit & dimidiũ ipſius C, dimidij ipſius B, pars ab eodẽ A, denominata; Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. 40. ſeptimi
Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . C . . . .

B . . . .

THEOR. 29. PROPOS. 31. 34.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C: Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D; qui neceſſario impar erit: Nam ſi ſit par, cũ metiatur imparem A; erit A, factus ex D, pari in eum 28. noni.
numerum, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar eſt. Quia igitur D, impar parem C, metitur; (eſt enim C, par, cum dimidiũ habeat B,) metietur quoque numerum B, eius dimidium. 30. noni.
Metitur autem & A: Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe exiſtentes metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt: Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquẽ numerũ primus ſit, &c. Quod erat oſtẽdendum.

A . . . . . . B . . . .

C . . . . D ----

THEOR.

35. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM a binario duplorũ unuſquiſque pariter par eſt tantum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque ſint B,C,D, E. Dico B,C,D,E, eſſe pariter pares tantum. Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt. Nam expoſita unitate, cum A, ſit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A,B,C,D,E, ab unitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. Quare A, quemlibet ipſorum B,C,D,E, & quilibet minor maiorem ſequentem metietur per aliquem ipſorum A,B, C, D, E; qui cum omnes ſint pares, utpote dupli a binario; metietur quemlibet ipſorum B,C,D,E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16. E,32.

11. noni.

QVOD autem iidem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim A, B, C, D, E, ſint ab unitate continue proportionales, ſitque A, proximus unitati numerus primus, nempe binarius; nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A,B,C,D,E; qui cum ſint omnes pares; metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

13. noni

SCHOLION.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantum. Sint n. A,B, C, D, E, F, a binario dupli, qui ex hic demonſtratis omnes ſunt pariter pares tantum. Dico nullum alium eſſe pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur;

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.

I --- H --- G ---

nentur; Atque adeo ſi ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia ſit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam ſi eſt impar, cum ſit ipſius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod eſt abſurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus: (Nam ſi eſt impar, cum ſit ipſius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod eſt abſurdum. ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit ſemper dimidiæ partis dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipſius I, dimidia pars unitas, ita ut ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantum, præter eos, qui a binario ſunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. 36.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem; metietur binarius, numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſius A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per pa-

A . . . .

rem

9. pron. rem E. Igitur fit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium, Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

19. ſeptimi

A . . . .
B . . . . .   C . . .
D -----   E ---

SCHOLION.

Itaqve ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tantum, conſtat ex hac propoſitione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demonſtratur, omnes pares, qui nec a binario ſint dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifeſtum eſt, nullum alium, præter ipſos, eſſe pariter imparem tantum; ſed uel eſſe pariter parem tantum, uel certe pariter parem & pariter imparem.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

37.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus ſit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.

PAR

PAR ſit numerus A, neque ſit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, ſed parem. Dico A, & pariter parem eſſe, & pariter imparem. Quod enim ſit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur cum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidiũ. Igitur ex definitione, pariter par eſt.

A . . . .

QVOD autem idem A, ſit etiam pariter impar, ita oſtẽdemus. Diuiſo A, bifariam, & eius dimidio rurſus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nã ſi in binarium incideremus, eſſet A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod eſt abſurdum. Igitur cũ in imparem incidamus, metietur ille impar ipſum A, per numerum parem: Alias ſi per imparem metiretur, cum impar imparem multiplicans faciat imparem; eſſet A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod eſt abſurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo uiciſſim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur eſt & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neq; a binario duplus ſit, &c. Quod oſtendendum erat. 29. noni.

SCHOLION.

FACILE ex dictis inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares ſint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario ſunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

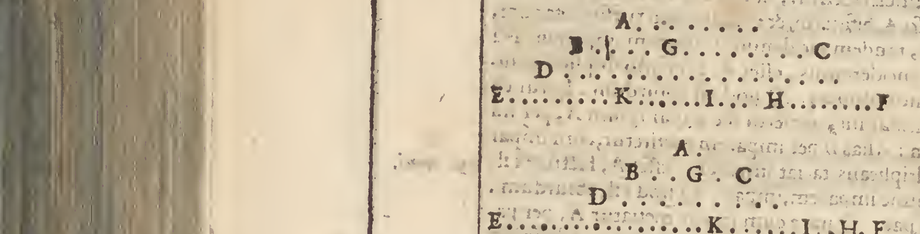
POrro ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. ſcripſimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a ſecun

do, & ultimo æquales ipſi primo: Erit ut ſecundi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, ſecundo, & E F, ultimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico eſſe ut B G, ad A; ita E H, ad A, B C, & D, ſimul. Detrahatur F I, ipſi B C, & F K, ipſi D, æqualis.



Quoniã igitur F I, æqualis eſt ipſi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia uero eſt ut A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque eſt K F, ipſi D, & I F, ipſi B C, & H F, ipſi A, æqualis: Erit quoque ut E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, &
12. ſeptimi I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc eſt, totus E H, ad D, B C, A, ſimul, (quibus ſumpti ſunt æquales K F, I F, H F,) ut I H, ad H F, hoc eſt, ut B G, ad A; ſunt enim B G, & A, ipſis I H, & H F, æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunque numerorum continue proportionalium, ſi modo primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim ſit exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus a ſecundo, & vltimo dematur, fiatque vt reli-

quus

quus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt.

Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota ſumma. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. *Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecundi. Id quod ex regula proportionum apud Arithmeticos manifeſtum eſt. Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui exceſſus 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe ut 2. ad 1. ita 2186. ad ſummam omnium, excepto vltimo; ſi 1. multiplicetur per 2186. fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur in 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1093. procreabitur ſumma omnium 3280.*

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, eſſe numerum perfectum.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G ---- 62. H,124. I,248. F ---- 496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O ---- P ----

Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem

dem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, ut A, ad D, ita E, ad I; Ac propterea numerus factus ex A, primo
19. *ſeptimi* in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in E, tertium: Factus eſt autem F, ex D, in E; Igitur idem F, fiet ex A, in I;
7. *pron.* ideoque I, ipſum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F,

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ------ P ------

ipſius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli ſunt: Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, ultimo numeri K, L, primo E, æquales, ſintque reliqui exceſſus M, N. Erit
35. *noni.* igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E. (cum enim G, duplus ſit ipſius E, ablatusque ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E, G, H, I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nempe numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex unitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compoſitus eidem E, eſt æqualis) erit compoſitus ex L, N, nimirum ipſe F, æqualis unitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare cũ unitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (cum enim
7. *pron.* F, factus ſit ex E, in D, metietur D, ipſum F; atque adeo
11. *pron.* eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, ipſum D, metientes. Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, ut oſtenſum eſt; metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, ipſum I, propter proportionem duplam, metientes) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, ut mox oſtendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F,
9. *pron.* per P; atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium; ac propterea eſt

ut

ut E, ad P, ita O, ad D. Quoniam uero, cum A, B, C, D, 19. ſeptimi
ab unitate ſint proportionales, & A, proximus unitati, pri-
mus; ultimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & 13. octaui
O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non
metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P;
Neque igitur E, ipſum P, metietur. Exiſtente ergo E, pri-
mo, erunt E, & P, inter ſe primi; ideoque in ſua propor- 31. ſeptimi
tione minimi: Ac proinde æque metietur E, ipſum O, & 23. & 21.
P, ipſum D. Nullus uero alius præter A, B, C, ipſum D, me ſeptimi
titur: Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A, B, C. Sit
idem, qui B, & quot ſunt B, C, D, tot ab E, ſumantur du-
pli E, G, H. Erit igitur ex æquo, ut B, ad D, ita E, ad H;
Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, 19. ſeptimi
qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E,
æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui
ex B, in H; atque adeo erit ut P, ad B, ita H, ad O. Erat au- 19. ſeptimi
tem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt
abſurdum ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C,
D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, meti-
tur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quã
ob rem, ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps exponan
tur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in unam ſummam colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipſa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1.2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3 in 2.

vltimum duplorum; perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. *Item, quia compoſitus ex his* 1. 2. 4. *nimirum* 7. *primus eſt: idcirco* 18. *factus ex* 7. *in* 4. *eſt perfectus habens has partes aliquotas* 1. 2. 4. 7. 14. *At uero quia compoſitus ex his* 1. 2. 4. 8. *hoc eſt,* 15. *non eſt primus; non erit* 120. *factus ex* 15. *in* 8. *perfectus.*

DENIQVE *quia compoſitus ex his* 1. 2. 4. 8. 16. *nimirum* 31. *primus eſt; erit* 496. *factus ex* 31. *in* 16. *numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt* 1.2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. *Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.*

FINIS ELEMENTI NONI.

ALEPH 2137207
05-14754

KAMM
X02

a–e^{8} A–2S^{8} 2T^{4} (2T4 blank)
A–2O^{8} 2P^{4}
2 vols collated & complete
Roger Gaskell 30.vi.03

629